



# Problèmes aux limites, optique géométrique et singularités

Antoine Benoit

## ► To cite this version:

Antoine Benoit. Problèmes aux limites, optique géométrique et singularités. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Nantes, 2015. Français. NNT: . tel-01180449

**HAL Id: tel-01180449**

**<https://theses.hal.science/tel-01180449>**

Submitted on 27 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Antoine BENOIT**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université de Nantes  
Label européen*

*sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

**École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques**

**Discipline : Mathématiques appliquées et applications des mathématiques., section CNU 26**

**Unité de recherche : Laboratoire de mathématiques Jean Leray**

**Soutenue le 30 juin 2015**

**Problèmes aux limites, optique géométrique et  
singularités.**

## JURY

Président :	<b>M. Guy MÉTIVIER</b> , Professeur des universités, Université de Bordeaux
Rapporteurs :	<b>M. David LANNES</b> , Directeur de recherche, Université de Bordeaux <b>M. Kevin ZUMBRUN</b> , Professeur des universités, Indiana University at Bloomington
Examineurs :	<b>M. Christophe CHEVERRY</b> , Professeur des universités, Université de Rennes 1 <b>M. Frédéric HÉRAU</b> , Professeur des universités, Université de Nantes <b>M. Marc WILLIAMS</b> , Professeur des universités, North Carolina University at Chapel-Hill
Directeur de thèse :	<b>M. Jean-François COULOMBEL</b> , Directeur de recherche, Université de Nantes



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte général et motivations. . . . .	1
1.2	Le problème aux limites standard. . . . .	4
1.2.1	Problèmes fortement bien posés et faiblement bien posés. . . . .	5
1.2.2	Etude qualitative des solutions, développements d'optique géométrique. . . . .	9
1.3	Le problème à coin. . . . .	13
1.3.1	Caractère fortement bien posé. . . . .	13
1.3.2	Développements d'optique géométrique pour des problèmes à coin. . . . .	17
1.4	Organisation du manuscrit. . . . .	19
<b>2</b>	<b>Développements d'optique géométrique et saturations d'énergie.</b>	<b>21</b>
2.1	Description du problème. . . . .	21
2.1.1	Quelques notations. . . . .	23
2.1.2	Hypothèses pour assurer le caractère bien posé. . . . .	23
2.2	Construction du développement BKW pour une fréquence elliptique. . . . .	28
2.2.1	Construction du terme principal. . . . .	30
2.2.2	Construction du second terme. . . . .	33
2.2.3	Construction des termes d'ordre supérieur. . . . .	35
2.2.4	Justification du développement. . . . .	35
2.3	Construction du développement BKW pour une fréquence elliptico-hyperbolique. . . . .	38
2.3.1	Construction du terme principal oscillant. . . . .	40
2.3.2	Terme principal évanescent. . . . .	41
2.3.3	Termes oscillants d'ordre un en $\varepsilon$ . . . . .	42
2.3.4	Retour sur la construction du terme évanescent principal. . . . .	43
2.3.5	Retour sur la construction des termes oscillants entrants. . . . .	44
2.3.6	Construction du second terme évanescent. . . . .	45
2.3.7	Termes d'ordre supérieur. . . . .	45
2.3.8	Justification du développement. . . . .	46
2.4	Saturations d'énergie. . . . .	47
2.4.1	Saturation de l'estimation d'énergie (2.25). . . . .	47
2.4.2	Saturation de l'estimation d'énergie (2.48). . . . .	49
2.5	Commentaires et conséquences. . . . .	51
2.5.1	Quelques commentaires sur l'hypothèse 2.4.1. . . . .	51
2.5.2	Classification et problèmes homogènes bien posés. . . . .	52
2.5.3	Equation d'Euler et condition de bord dissipative. . . . .	52

<b>3</b>	<b>Vitesse finie de propagation dans la classe <math>WR</math></b>	<b>57</b>
3.1	Introduction du chapitre 3. . . . .	57
3.2	Notations et résultats préliminaires. . . . .	58
3.3	Théorème principal, énoncé et principe de Holmgren. . . . .	61
3.4	Démonstration du lemme principal. . . . .	64
3.5	Fin de la démonstration du théorème 3.3.1. . . . .	66
3.5.1	Le cas régulier, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega_T)$ . . . . .	66
3.5.2	Le cas $u \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}_+^d))$ . . . . .	68
3.6	Optimalité de la vitesse maximale de propagation. . . . .	69
<b>4</b>	<b>Problème à coin et conditions de bord strictement dissipatives.</b>	<b>71</b>
4.1	Description du problème. . . . .	71
4.1.1	Hypothèses et définitions. . . . .	73
4.2	Résultat principal. . . . .	74
4.2.1	L'estimation d'énergie a priori. . . . .	75
4.2.2	Existence d'une solution faible pour le problème (4.1). . . . .	76
4.2.3	Théorème "fort=faible". . . . .	80
4.2.4	Unicité de la solution faible du problème (4.1). . . . .	81
<b>5</b>	<b>Problème à coin dans le cadre général et condition d'Osher.</b>	<b>83</b>
5.1	Description du problème . . . . .	83
5.2	Notations et résultats préliminaires. . . . .	84
5.3	Définitions et hypothèses. . . . .	86
5.3.1	Une condition provenant de l'étude du problème aux limites, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. . . . .	86
5.3.2	La condition au coin. . . . .	89
5.3.3	Deux hypothèses peut-être de nature plus technique. . . . .	93
5.4	La démonstration d'Osher [Osh73]. . . . .	93
5.4.1	Reduction à un problème homogène à l'intérieur. . . . .	94
5.4.2	Estimation d'énergie a priori et symétriseur. . . . .	95
5.4.3	Démonstration du théorème 5.4.2 en utilisant le symétriseur. . . . .	96
5.5	Construction du symétriseur. . . . .	98
5.5.1	Construction de l'opérateur $J$ . . . . .	98
5.5.2	Choix de l'opérateur $N$ . . . . .	103
5.5.3	Etude des opérateurs $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$ et $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$ . . . . .	105
5.6	Résumé et perspectives. . . . .	110
5.6.1	Quelle hypothèse est utilisée à quel endroit ? . . . . .	110
5.6.2	Perspectives. . . . .	111
<b>6</b>	<b>Développements d'optique géométrique pour des problèmes à coin.</b>	<b>113</b>
6.1	Introduction. . . . .	113
6.2	Quelques notations et définitions. . . . .	114
6.3	La génération des phases pour $N = 2$ . . . . .	118
6.3.1	Les phases générées par le terme source. . . . .	118
6.3.2	Le premier rebond. . . . .	121
6.3.3	Les rebonds suivants et résumé. . . . .	122
6.4	L'équation des ondes. . . . .	123
6.4.1	Description des phases. . . . .	124
6.4.2	Construction du développement BKW. . . . .	125
6.4.3	Justification du développement BKW. . . . .	133

6.5	Un exemple de développement BKW avec plusieurs rebonds. . . . .	134
6.6	Un exemple de développement BKW avec une infinité de rebonds. . . . .	140
6.6.1	Description des phases. . . . .	141
6.6.2	Construction du développement BKW . . . . .	142
6.6.3	Justification du développement BKW. . . . .	146
6.7	Retour sur l'exemple (5.13) d'Osher. . . . .	149
6.8	La génération des phases pour $N > 2$ . . . . .	152
6.8.1	Les phases induites par le terme source. . . . .	152
6.8.2	Le premier rebond. . . . .	154
6.8.3	Les rebonds suivants et résumé. . . . .	154
6.9	Développements BKW pour $N > 2$ et rayon piégé. . . . .	155
6.9.1	Un exemple illustratif. . . . .	156
6.9.2	Cadre formel. . . . .	162
6.9.3	Construction du développement BKW. . . . .	170
6.9.4	Justification du développement BKW. . . . .	190
6.9.5	Etude de la condition d'inversibilité. . . . .	193
6.9.6	Exemples pour lesquels la condition d'inversibilité (6.154) est satisfaite. . . .	197
6.9.7	Modifications apportables à la démonstration du théorème 6.9.2. . . . .	204
6.10	Résumé et perspectives. . . . .	207



# Table des figures

2.1	Les différents types de condition aux limites pour l'équation d'Euler linéarisée. . . .	55
3.1	Illustration du feuilletage $(\mathcal{E}_\theta)_{\theta \in [0,1]}$ . . . . .	63
6.1	Les quatres types de phases oscillantes. . . . .	120
6.2	Lien entre la géométrie de la variété caractéristique et la génération des phases. . . .	122
6.3	Section de la variété caractéristique pour l'équation des ondes. . . . .	125
6.4	Illustration du phénomène de transport pour les vitesses de groupe entrantes-entrantes.	130
6.5	Allure des bicaractéristiques pour l'équation des ondes. . . . .	134
6.6	Génération des phases pour le problème à coin (6.41). . . . .	137
6.7	Allure des bicaractéristiques du problème à coin (6.41). . . . .	139
6.8	Génération des phases pour le problème à coin (6.54). . . . .	142
6.9	Allure des bicaractéristiques du problème à coin (6.54). . . . .	150
6.10	La génération des phases pour l'exemple (5.13). . . . .	151
6.11	Section de la variété caractéristique et génération des phases pour le problème à coin (6.96). . . . .	158
6.12	Génération d'une infinité de phases au voisinage d'un point d'intersection. . . . .	158
6.13	Allure des bicaractéristiques de "l'avant" boucle, le rebond $1 \rightarrow 2$ et ses descendants.	162
6.14	Allure des bicaractéristiques de la boucle. . . . .	162
6.15	Allure des bicaractéristiques de "l'après" boucle, le rebond $3 \rightarrow 4$ et ses descendants.	163
6.16	Structure "arborée" de l'ensemble des fréquences $\mathcal{F}$ . . . . .	176
6.17	Illustration de la démonstration de la proposition 6.9.6. . . . .	184
6.18	Illustration du procédé de détermination des phases dans l'un des arbres D. . . . .	187
6.19	Construction de Sarason et Smoller pour $p_1 := 5\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - 6\xi_1\xi_2 - 1$ et $p_2 := \frac{25}{49}\xi_1^2 + \frac{14}{5}\xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 - 1$ . . . . .	198
6.20	Section de la variété caractéristique du système perturbé. . . . .	203
6.21	Un exemple de variété caractéristique avec une boucle d'autointeraction et une boucle de non-autointeraction. . . . .	207
6.22	Allure des bicaractéristiques associées à une telle configuration. . . . .	207





# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte général et motivations.

De nombreuses équations aux dérivées partielles issues de la physique s'écrivent sous la forme d'un système de lois de conservation :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d \partial_j f_j(u) = 0, \quad (1.1)$$

où les composantes du vecteur  $u \in \mathbb{R}^N$  désignent des quantités physiques, par exemple, la vitesse d'un fluide, sa densité ou encore sa charge électrique et où les fonctions  $f_j$  sont définies sur  $\mathcal{O}$  (un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , représentant l'ensemble des états admissibles) à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ . Concernant l'étude de tels systèmes de lois de conservation on peut citer [Ser99]-[Ser00].

Dans cette thèse, on s'intéressera au cas bien particulier dans lequel les fonctions  $f_j$  sont de la forme  $f_j(u) = A_j u$ , où  $A_j$  est une matrice de taille  $N \times N$  à coefficients réels. Ainsi, les systèmes de lois de conservation que l'on considérera par la suite s'écriront sous la forme :

$$L(\partial)u := \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u = f, \quad (1.2)$$

le terme source  $f$  étant une fonction dans  $L^2(\Omega)$ , où  $\Omega$  est le domaine sur lequel on cherche à résoudre l'équation (1.2).

A titre d'exemples d'équations issues de la physique s'écrivant sous la forme (1.2) on peut citer, l'équation des ondes, l'équation de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0, \\ \partial_t E - \operatorname{rot} B = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $B \in \mathbb{R}^3$  est le champ magnétique et  $E \in \mathbb{R}^3$  désigne le champ électrique, ou encore l'équation de l'élastodynamique linéaire isotrope :

$$\begin{cases} \partial_t F + \nabla v = 0, \\ \partial_t v + \operatorname{div} T = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $v \in \mathbb{R}^d$  est la vitesse de la déformation,  $F \in \mathbf{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$  le tenseur de déplacement et où le tenseur des contraintes  $T$  est donné par :

$$T := \lambda(F + F^T) + \frac{\mu}{2}(\operatorname{Tr} F)I,$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  les coefficients de Lamé.

Toutefois l'étude du système linéaire (1.2) est aussi mathématiquement intéressante pour soi-même. En effet, une méthode classique pour résoudre des problèmes quasilineaires est de se ramener à un système linéaire à coefficients variables et d'appliquer une méthode de point fixe. Par conséquent, comprendre le cas le plus simple d'un problème linéaire à coefficients constants est un bon travail préparatoire pour appliquer cette méthode.

Le problème de Cauchy associé à l'équation (1.2) est facile à résoudre. En effet, il suffit de prendre la transformée de Fourier dans la variable d'espace pour se ramener à une équation différentielle ordinaire dans la variable temporelle. On obtient alors facilement une solution formelle et on montre ensuite que, sous une hypothèse d'hyperbolicité de l'opérateur (1.2), la solution construite est dans  $L^2(\Omega)$ .

Dans la suite de ce manuscrit on s'intéressera à des problèmes pour lesquels la variable d'espace  $x$  vit dans un demi-espace ou bien un quart d'espace. Les problèmes dans le demi-espace seront qualifiés de problèmes aux limites standards, tandis que ceux dans le quart d'espace seront nommés problèmes à coin. Ce mémoire est composé de deux parties distinctes. La première, qui regroupe les chapitres 2 et 3, traite de problèmes aux limites standards. La seconde, qui constitue le reste de ce manuscrit, traite de problèmes à coin.

Afin que ce problème admette une solution, on doit imposer des conditions sur la trace de la solution sur le bord ou sur les deux faces du domaine dans le cas du quart d'espace. L'opérateur  $L(\partial)$  étant hyperbolique, on doit imposer sur chaque face du domaine le bon nombre de conditions de bords (voir [BG07]), afin d'éviter de sur-déterminer ou à l'inverse de sous-déterminer le problème. On s'intéresse ici à des conditions de bords générales c'est-à-dire de la forme

$$Bu|_{x_d=0} = g, \text{ pour le problème aux limites dans le demi-espace } \{x_d > 0\}, \quad (1.5)$$

et,

$$\begin{cases} B_1 u|_{x_1=0} = g_1, \\ B_2 u|_{x_2=0} = g_2, \end{cases} \text{ pour le problème à coin, dans le quart d'espace } \{x_1, x_2 > 0\}, \quad (1.6)$$

où les matrices à coefficients réels  $B$ ,  $B_1$  et  $B_2$  ont le bon nombre de lignes (qui sera spécifié par la suite) et  $N$  colonnes. Les termes sources  $g$ ,  $g_1$  et  $g_2$  seront des fonctions dans  $L^2$ .

Le but de l'analyse est alors de déterminer toutes les matrices de bords qui conduisent à un caractère fortement bien posé pour le problème (1.2)-((1.5) ou (1.6)). Par fortement bien posé on entend que pour tout terme source à l'intérieur  $f \in L^2(\Omega)$  et sur le bord,  $g \in L^2(\partial\Omega)$  (ou  $g_1 \in L^2(\partial\Omega_1)$  et  $g_2 \in L^2(\partial\Omega_2)$  dans le cas d'un problème à coin), le problème aux limites (1.2)-((1.5) ou (1.6)) admet une unique solution  $u \in L^2(\Omega)$ , à trace(s) dans  $L^2(\partial\Omega)$ , telle que, dans une certaine norme, la solution et sa (ses) trace(s) sont contrôlées par la norme des termes sources.

Les motivations qui nous poussent à étudier de tels problèmes sont les suivantes. En premier lieu, lorsque l'on veut résoudre l'équation d'évolution (1.2) dans un domaine borné  $\Omega$  de frontière régulière, la méthode classique consiste à appliquer une partition de l'unité au domaine  $\Omega$ . On se ramène alors à résoudre des problèmes posés dans l'espace entier (pour les ouverts de la partition loin de  $\partial\Omega$ ) et des problèmes dans le demi-espace (pour les ouverts de la partition qui intersectent  $\partial\Omega$ ).

Ainsi, l'une des motivations pour étudier les problèmes à coin est de pouvoir appliquer ce même raisonnement à des domaines dont la frontière n'est pas régulière (plus précisément  $\mathcal{C}^1$  par morceaux) en permettant de prendre en compte les ouverts de la partition dont l'intersection avec  $\partial\Omega$  contient un point anguleux.

Ensuite, les systèmes de lois de conservations (1.1), même dans le cas le plus favorable où il s'agit d'équations scalaires ( $N = 1$ ) ou de systèmes unidimensionnels, développent des singularités en temps fini. En effet, c'est un résultat classique que l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x (u^2) = 0, \\ u|_{t=0} = -\tanh x, \end{cases}$$

avec  $u \in \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , admet une solution singulière, correspondant à un choc qui propage la singularité de la condition initiale. Ainsi, une question naturelle pour les systèmes de lois de conservation est de savoir si lorsque l'on choisit une donnée initiale présentant une hypersurface de discontinuité, on peut construire une solution faible de (1.1). Ensuite, il est intéressant de savoir si la solution construite ressemble à la solution initiale dans le sens où elle ne génère pas plus de singularités que celles qui étaient initialement présentes. Enfin, la dernière question est celle de la stabilité de la solution par rapport aux petites perturbations de la condition initiale. Dans le cas d'un seul choc, ces questions ont été traitées par Majda dans [Maj83b] et [Maj83a]. Le premier point de cette étude est de se ramener à une géométrie fixe en redressant le front de la singularité. On cherche alors une solution sous la forme :

$$u = \begin{cases} u_l, & x_d < \varphi(t, x'), \\ u_r, & x_d > \varphi(t, x'), \end{cases}$$

où  $\varphi$  est l'équation du choc inconnu et où la fonction  $u_l$  (resp.  $u_r$ ) est solution d'un problèmes aux limites standards sur  $\{x_d < \varphi(t, x')\}$  (resp.  $\{x_d > \varphi(t, x')\}$ ). Les fonctions  $u_l$  et  $u_r$  sont reliées l'une à l'autre par la condition de bord sur l'hypersurface  $\{x_d = \varphi(t, x')\}$ . Dans le cas d'un choc, la condition de bord est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot. Ensuite, Majda sous une condition de stabilité uniforme sur le choc, qui revient à imposer que le problème aux limites correspondant vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (voir sous-paragraphe 1.2.1 pour une description de cette condition), résout ce problème aux limites.

Toutefois, dans le cas des systèmes de lois de conservations multidimensionnels (*i.e.* pour lesquels  $N > 2$ ), de façon générique, on s'attend à ce que la singularité initiale génère instantanément  $N$  singularités. Ainsi, après redressement des fronts des singularités, la solution que l'on cherche à construire s'écrit sous la forme :

$$u = \begin{cases} u_l, & x_d < \varphi(t, x'), \\ u_m, & \varphi(t, x') < x_d < \psi(t, x'), \\ u_r, & x_d > \psi(t, x'), \end{cases}$$

où les fonctions  $u_l$  et  $u_r$  sont toujours des solutions de problèmes aux limites standards, mais où maintenant la fonction  $u_m$  est solution d'un problème à coin dans un dièdre. Le cas de l'interaction de deux chocs vérifiant la condition de stabilité uniforme de Majda a été traité par Métivier dans [Mét86]. Dans cet article, sous une condition supplémentaire sur les conditions de bords, l'auteur démontre l'existence d'une solution présentant deux chocs.

Ainsi, le problème à coin peut-être vu comme un modèle pour étudier l'interaction de plusieurs singularités pour le problème de Cauchy d'un système de lois de conservations multidimensionnel. Une question que l'on pense intéressante est alors d'essayer d'établir un lien entre la condition imposée par Métivier dans [Mét86] et la condition imposée dans Osher dans [Osh73] que l'on reprendra pour étudier le problème à coin.

Enfin, une dernière motivation concernant l'étude des problèmes à coins est liée aux simulations numériques de problèmes de Cauchy. Lors d'une simulation numérique, en raison de l'impossibilité

de modéliser  $\mathbb{R}^N$  en machine, on se place bien souvent dans un "grand" pavé. Ensuite, ou bien on arrête la simulation lorsque la solution atteint une arête ou un sommet du pavé, ou bien on essaye de mettre en oeuvre des méthodes de reconstruction de la solution approchée en minimisant les termes "parasites" issus de la réflexion contre le bord du domaine de simulation. Comprendre quel peut être le comportement de la solution d'un problème à coin au voisinage du coin pourrait permettre d'améliorer ces techniques de reconstruction. Si on fait le parallèle avec le problème aux limites standards, le caractère fortement bien posé du problème "continu" a été établi par Kreiss [Kre70] avant la stabilité du problème "discret" (c'est-à-dire associé à un schéma numérique) (voir à ce sujet [GKS72] et [Cou11b]). Ainsi, le caractère fortement bien posé du problème à coin dans le cas "continu" pourrait aussi être plus facile à établir que la stabilité d'un schéma numérique visant à approcher la solution du problème à coin.

## 1.2 Le problème aux limites standard.

Le problème que l'on va considérer dans le paragraphe suivant s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} L(\partial)u = f, \text{ sur } x_d \geq 0, t \geq 0, \\ Bu|_{x_d=0} = g, \text{ sur } x_d = 0, t \geq 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Avant, de rappeler le théorème de Kreiss [Kre70] qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (1.7) soit fortement bien posé, on donne quelques hypothèses sous lesquelles on se placera dans cette étude.

Premièrement, utilisant des arguments de vitesse finie de propagation, on montre qu'une condition nécessaire pour que le problème (1.7) soit fortement bien posé est que l'opérateur  $L(\partial)$  soit hyperbolique. Pour des raisons techniques propres à l'étude des problèmes aux limites, on choisira un opérateur  $L(\partial)$  hyperbolique à multiplicité constante, c'est-à-dire qui vérifie l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.2.1** *Il existe  $M \in \mathbb{N}^*$ , des fonctions régulières sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  à valeurs réelles ainsi que des entiers positifs  $\nu_1, \dots, \nu_M$  tels que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \det \left( \tau + \sum_{j=1}^d \xi_j A_j \right) = \prod_{k=1}^M (\tau + \lambda_k(\xi))^{\nu_k},$$

avec  $\lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_M(\xi)$ . De plus les valeurs propres  $\lambda_k(\xi)$  de  $\sum_{j=1}^d \xi_j A_j$  sont semi-simples.

On peut noter que le cadre optimal dans lequel on pourrait se placer est celui des opérateurs hyperboliques géométriquement réguliers [MZ05]. On peut aussi vérifier que les exemples physiques (1.3) et (1.4) vérifient l'hypothèse 1.2.1.

Une autre hypothèse classique dans l'étude des problèmes aux limites est de supposer que le problème est non caractéristique pour le bord du demi-espace.

**Hypothèse 1.2.2** *Le coefficient normal de  $L(\partial)$ ,  $A_d$ , est inversible.*

Cette hypothèse n'est pas nécessaire en soi mais a l'avantage de simplifier l'analyse du problème (1.7). On peut remarquer que les deux systèmes (1.3) et (1.4) sont caractéristiques. Concernant l'étude des problèmes aux limites caractéristiques, on peut citer par exemple [MO75]-[Ohk81]-[Ohk89].

### 1.2.1 Problèmes fortement bien posés et faiblement bien posés.

Avant tout, on précise les termes du titre de ce sous-paragraphe. On a déjà caractérisé ce que l'on entendait par problème fortement bien posé dans le paragraphe précédent (la solution existe, est unique et est aussi régulière que les termes sources). Par problème faiblement bien posé, on entendra des problèmes de type (1.7) pour lesquels il existe une unique solution  $u$  mais où  $u$  est moins régulière (dans les espaces de Sobolev) que les données du problème  $f$  et  $g$ . Ainsi, la solution  $u$  perd des dérivées par rapport aux termes sources.

On va commencer par décrire la caractérisation des problèmes fortement bien posés. Les éléments de démonstration que l'on va donner, ici, seront utilisés tout au long de ce manuscrit, aussi bien pour les problèmes aux limites standards faiblement bien posés que pour les problèmes à coin.

Le premier point dans la preuve du caractère fortement bien posé du problème aux limites (1.7) est d'étudier le caractère fortement bien posé du même problème mais où la variable temporelle  $t$  est prise dans tout  $\mathbb{R}$  ; on parle alors de problème aux limites standard global en temps :

$$\begin{cases} L(\partial)u = f, \text{ sur } x_d \geq 0, t \in \mathbb{R}, \\ Bu|_{x_d=0} = g, \text{ sur } x_d = 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.8)$$

On utilise ensuite un principe de causalité et des estimations d'énergies améliorées, d'abord établies par Rauch [Rau72] dans le cas strictement hyperbolique et ensuite généralisées par Audiard [Aud11] pour les systèmes hyperboliques à multiplicité constante, pour établir le caractère fortement bien posé du problème (1.7) en se basant sur celui du problème (1.8). Concernant ce sujet, on peut aussi citer [Mét14].

Les trois grandes étapes pour démontrer le caractère fortement bien posé du problème (1.8) sont les suivantes : on commence par démontrer une estimation d'énergie (dite estimation d'énergie a priori) vérifiée par toute solution assez régulière du problème (1.8). Puis, en introduisant un problème dit dual, on construit une solution faible du problème (1.8). Enfin on conclut par un lemme de type "fort=faible" qui dans le cas présent consiste en un argument de régularisation de la solution dans les variables tangentielles au bord (la régularité dans la variable normale étant alors donnée par l'équation d'évolution de (1.8)).

Il existe un cadre particulier pour lequel la démonstration est grandement facilitée. Ce cadre est celui de systèmes symétriques (au sens où les matrices  $A_j$  sont symétriques) et qui admettent des conditions de bords strictement dissipatives, c'est-à-dire les conditions de bords telles que la matrice  $B$  vérifie la propriété suivante :

$$\exists c, C > 0, \forall v \in \mathbb{R}^N, c|v|^2 + \langle A_d v, v \rangle \geq C|Bv|^2.$$

La démonstration de l'estimation d'énergie a priori provient alors d'un argument d'intégration par parties dans l'équation d'évolution de (1.8). L'intégrale du terme de bord en  $\{x_d = 0\}$  est contrôlée par stricte dissipativité.

Ensuite, pour construire une solution faible au problème (1.8), on introduit un problème dual. Une petite modification de la démonstration de Lax et Phillips [LP60] permet de construire ce problème dual de manière à ce qu'il admette des conditions de bord strictement dissipatives et donc vérifie l'estimation d'énergie a priori. Cette estimation d'énergie pour le problème dual permet alors de montrer que l'application qui à un choix de termes sources associe la solution du problème dual associé est injective. On conclut alors que l'application qui à un choix de termes sources associe la solution du problème primal est surjective, ce qui donne l'existence d'une solution faible.

Dans le cas particulier des conditions de bord strictement dissipatives d'autres approches sont aussi possibles. Par exemple, dans le cas d'une condition de bord homogène, si on isole la dérivée temporelle dans (1.7), on peut écrire ce problème sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u + Au = f, \text{ sur } x_d \geq 0, t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

où l'on cherche une solution  $u$  dans le domaine de l'opérateur  $A$ . La condition de bord étant prise en compte dans le domaine de  $A$ . On peut alors utiliser la stricte dissipativité pour montrer le caractère maximal monotone de  $A$  et conclure par le théorème de Hille-Yosida [Bre83]-[Yos95]. On peut, par exemple, trouver une version rédigée de cette démonstration dans [BG07].

Dans le cas général, l'article fondateur dans l'étude du problème aux limites (1.8) est dû à Kreiss en 1970 [Kre70] (on peut aussi citer un papier de Sarason de 1965, [Sar65], moins général, mais dans lequel le problème (1.7) peut être traité directement). Dans cet article Kreiss caractérise totalement les problèmes aux limites standards fortement bien posés en fonction de la réalisation d'une certaine condition algébrique sur la matrice de bord  $B$ , condition que l'on appellera condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme (qui va être introduite ci-après).

On va maintenant décrire les principales idées des deux premiers points de la démonstration à savoir l'estimation d'énergie a priori et la construction d'une solution faible.

Après transformée de Laplace dans la variable temporelle  $t \leftrightarrow \sigma$  (la variable de Laplace  $\sigma \in \mathbb{C}_+ := \{\sigma := \gamma + i\tau \mid \gamma > 0\}$ ) et transformée de Fourier dans la variable spatiale tangentielle  $x' \leftrightarrow \eta$ , le système (1.8) s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire dans la variable normale :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_d}u = \mathcal{A}(\sigma, \eta)u + A_d^{-1}f, \text{ sur } x_d \geq 0, \\ Bu|_{x_d=0} = g, \text{ sur } x_d = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

où la matrice résolvante  $\mathcal{A}(\sigma, \eta)$  est définie par <sup>1</sup>:

$$\mathcal{A}(\sigma, \eta) = -A_d^{-1} \left( \sigma I + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right).$$

Hersh [Her63] a d'abord démontré qu'au sens des systèmes dynamiques le problème (1.10) n'admet pas de sous-espace central pour  $\gamma > 0$ . En effet, d'après l'hypothèse d'hyperbolicité on montre facilement que tant que  $\gamma > 0$ , les valeurs propres de  $\mathcal{A}(\sigma, \eta)$  ont une partie réelle non nulle. Ainsi, l'espace  $\mathbb{C}^N$  se décompose comme la somme directe du sous-espace stable  $E^s(\sigma, \eta)$  et du sous-espace instable  $E^u(\sigma, \eta)$ . De ce constat, Hersh montre que pour que le problème (1.10) ne développe pas d'instabilité d'Hadamard, c'est-à-dire qu'une solution ne peut exister même au prix d'une perte arbitrairement grande de dérivées par rapport aux termes sources<sup>2</sup>, il est nécessaire que la condition de Kreiss-Lopatinskiï (faible) soit satisfaite :

**Hypothèse 1.2.3** *Pour tout  $\gamma > 0$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ , on a*

$$\ker B \cap E^s(\gamma + i\tau, \eta) = \{0\}.$$

*De façon équivalente, la matrice  $B$  restreinte au sous-espace stable  $E^s(\gamma + i\tau, \eta)$  est inversible. En d'autres termes, utilisant l'homogénéité de degré 0 de  $E^s(\gamma + i\tau, \eta)$ , pour tout  $(\gamma, \tau, \eta) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , tels que  $|\gamma + i\tau|^2 + |\eta|^2 = 1$ , il existe une constante  $C_{(\gamma+i\tau, \eta)} > 0$  telle que :*

$$\forall v \in E^s(\gamma + i\tau, \eta), |v| \leq C_{(\gamma+i\tau, \eta)} |Bv|. \quad (1.11)$$

<sup>1</sup>On remarquera que dans cette formulation, on suppose que la matrice  $A_d$  est inversible.

<sup>2</sup>Par conséquent, cette condition sera aussi nécessaire lorsque l'on considérera les problèmes faiblement bien posés.

L'apport de Kreiss est d'avoir démontré qu'une version uniforme de la condition (1.11) (dans le sens où la constante  $C$  ne dépend plus de  $(\gamma + i\tau, \eta)$ ) était nécessaire et suffisante pour que le problème (1.10) soit fortement bien posé. Cependant, montrer le caractère uniforme de la constante  $C_{(\gamma+i\tau, \eta)}$  dans l'équation (1.11) est très difficile en pratique. C'est pourquoi Kreiss compactifie la demi-sphère

$$\Sigma := \left\{ \zeta := (\gamma, \tau, \eta) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \setminus |\gamma + i\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \right\},$$

en considérant le cas où  $\gamma$  est nul, en posant :

$$\Xi := \left\{ \zeta := (\gamma, \tau, \eta) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \setminus |\gamma + i\tau|^2 + |\eta|^2 = 1 \right\}.$$

Mais alors, les résultats de Hersh ne s'appliquent plus. Il faut donc prendre en compte le sous-espace central. Pour pallier à cette difficulté, Kreiss montre que le sous-espace stable défini pour  $\gamma > 0$  admet un prolongement par continuité pour  $\gamma = 0$ . Ce résultat a ensuite été généralisé aux systèmes hyperboliques à multiplicité constante par Métivier [Mét00]. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème aux limites standard (1.10) soit fortement bien posé, c'est-à-dire la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme, s'énonce donc sous la forme :

**Hypothèse 1.2.4** *Pour tout  $\zeta \in \Xi$ , on a*

$$\ker B \cap E^s(\zeta) = \{0\}.$$

*De façon équivalente, la matrice  $B$  restreinte au sous-espace stable  $E^s(\zeta)$  est inversible. En d'autres termes, pour tout  $\zeta \in \Xi$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$\forall v \in E^s(\zeta), |v| \leq C|Bv|. \quad (1.12)$$

La question maintenant est de savoir comment Kreiss arrive à démontrer l'estimation d'énergie sous l'hypothèse 1.2.4. En un certain sens, Kreiss se ramène au cas symétrique à condition de bord strictement dissipatives. C'est-à-dire qu'il construit un objet appelé "symétriseur" de Kreiss,  $\mathcal{S}$  qui permet de compenser d'une part le défaut de symétrie des matrices  $A_j$ , et d'autre part le manque de dissipativité des conditions de bord. Plus précisément, un symétriseur de Kreiss est défini de la façon suivante :

**Définition 1.2.1** *Le problème aux limites (1.10) admet un symétriseur de Kreiss si pour tout  $\underline{\zeta} \in \Xi$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Xi$ , une constante  $c > 0$  et une application de classe  $C^\infty$*

$$\mathcal{S} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{H}_{N \times N},$$

où  $\mathbf{H}_{N \times N}$  désigne l'ensemble des matrices hermitiennes de tailles  $N \times N$ , qui vérifient les deux conditions suivantes :

- i)  $\forall \zeta \in \mathcal{V}, \operatorname{Re}(\mathcal{S}(\zeta)\mathcal{A}(\zeta)) \leq -c\gamma.$
- ii)  $\forall \zeta \in \mathcal{V}, \forall w \in \mathbb{C}^N, c|w|^2 + \langle \mathcal{S}(\zeta)w, w \rangle \leq \frac{1}{c}|Bw|^2.$

Si un tel symétriseur est construit, alors il suffit, comme dans le cas strictement dissipatif, d'appliquer ce symétriseur à l'équation d'évolution de (1.10), de prendre le produit scalaire par  $u$  et de faire une intégration par parties pour établir l'estimation d'énergie a priori.

Sans entrer dans les détails de la construction qui est assez technique (voir par exemple [Kre70]-[BG07]-[CP81]), on mentionne toutefois que la construction du symétriseur de Kreiss se fait de différentes façons en fonction de la fréquence  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  ( $\Xi_0 := \Xi \cap \{\gamma = 0\}$ ) autour de laquelle on localise. Les différentes possibilités sont les suivantes :

◊ Le spectre de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  conserve la propriété de Hersh. C'est-à-dire que les éléments de son spectre ont une partie réelle non nulle. On dit alors que la fréquence  $\underline{\zeta}$  est elliptique.



◊ La partie réelle de certains éléments du spectre de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  s'annule à l'ordre un. En d'autres termes des valeurs propres purement imaginaires apparaissent. On dit alors que la fréquence  $\underline{\zeta}$  est elliptico-hyperbolique. Dans le cas particulier où la partie réelle de tous les éléments du spectre s'annule à l'ordre un, on parle de fréquence hyperbolique.

◊ La partie réelle d'au moins un élément du spectre de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  s'annule à un ordre strictement inférieur à un. On dit alors que la fréquence  $\underline{\zeta}$  est de "glancing"(ou rasante).<sup>3</sup>

Une fois l'estimation d'énergie a priori établie, pour démontrer l'existence d'une solution faible pour le problème (1.10), on commence par introduire un problème dual :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_d}v = \tilde{\mathcal{A}}(\sigma, \eta)v \text{ sur } x_d \geq 0, \\ Cv|_{x_d=0} = g, \text{ sur } x_d = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

Le but est alors de démontrer l'unicité de la solution du problème dual (1.13), ce qui démontre l'existence d'une solution pour le problème primal (1.10). Pour démontrer cette propriété d'unicité, il suffit de démontrer que le problème dual vérifie l'estimation d'énergie a priori. Ainsi, pour réitérer la construction du symétriseur de Kreiss, au problème dual cette fois, il faut vérifier que le problème dual vérifie les hypothèses sous lesquelles l'estimation d'énergie a priori (pour le problème primal) a été démontrée.

Le point principal est de montrer que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme passe au problème dual (on renvoie à [BG07] pour les détails de la démonstration). Ce point conclut la démonstration, et donne ainsi l'équivalence entre le caractère fortement bien posé du problème aux limites (1.10) et la réalisation de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme.

Cependant, l'analyse du problème aux limites (1.8) n'en est pas totale pour autant. En effet, si on s'intéresse à un opérateur hyperbolique donné, on remarque alors par de simples calculs que dans "la majorité" des conditions de bord, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est pas vérifiée. On peut par exemple citer [BGRSZ02] pour une étude des conditions aux bord qui vérifient la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour l'équation des ondes.

On a déjà mentionné au début de ce sous-paragraphe que si la condition de Kreiss-Lopatinskii faible n'était pas vérifiée alors l'existence d'une solution pour le problème aux limites associé ne pouvait pas être assurée même au prix d'un nombre arbitrairement grand de pertes de dérivées. Par conséquent, les seules dégénérescences de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme qui peuvent donner lieu à un problème faiblement bien posé se font nécessairement sur le bord de la demi-sphère fermée  $\Xi$ .

Or on a décrit les différents types de structures que pouvait avoir la matrice résolvante  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  pour ces fréquences de bord. Il y a quatre cas possibles, elliptique, elliptico-hyperbolique, hyperbolique et glancing. Ainsi, il y a quatre types de dégénérescences de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme possibles.

L'étude des problèmes aux limites standards faiblement bien posés débute pour les problèmes aux limites dont la dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme se fait sur une fréquence elliptique. Plus précisément, dans un cadre où la fréquence  $\underline{\zeta}$  qui viole la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme est elliptique et où

$$\dim(\ker B \cap E^s(\underline{\zeta})) = 1.$$

---

<sup>3</sup>Un énoncé plus précis des différentes structures de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  est donné par le lemme de structure par blocs, voir [Kre70] et [Mét00]. Ce lemme sera aussi rappelé dans le corps de ce manuscrit.

Dans ce cas de figure, Sablé-Tougeron dans [ST88], utilise la souplesse de la construction du symétriseur de Kreiss pour l'adapter à des problèmes avec violation de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone elliptique. L'estimation d'énergie obtenue est une estimation avec une perte d'une dérivée entre le terme source sur le bord et la trace de la solution.

Par la suite, Coulombel a établi, toujours en adaptant la construction du symétriseur, des estimations d'énergie a priori dans le cas d'une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone elliptico-hyperbolique [Cou02], puis dans la zone hyperbolique [Cou05]. Pour la zone elliptico-hyperbolique, il suppose que l'intersection entre  $\ker B$  et  $E^s(\underline{\zeta})$  est de dimension un et est portée par un vecteur dans la partie elliptique de  $E^s(\underline{\zeta})$ .

Les estimations d'énergie obtenues sont alors avec pertes d'une dérivée sur le bord et d'une demi (resp. une) dérivée dans le cas de la zone elliptico-hyperbolique (resp. hyperbolique)<sup>4</sup>. Il est intéressant de remarquer l'apparition de cette perte d'une demi-dérivée à l'intérieur alors que les conditions d'intersection entre  $\ker B$  et  $E^s(\underline{\zeta})$  sont sensiblement les mêmes pour les zones elliptique et elliptico-hyperbolique.

Le premier résultat de cette thèse, qui occupe le chapitre 2, est d'avoir démontré que, dans le cas d'une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii dans la zone elliptique ou elliptico-hyperbolique, les estimations d'énergie démontrées dans [ST88] et [Cou02] étaient optimales. Ce résultat reprend la méthode introduite par Coulombel et Guès [CG10] pour démontrer l'optimalité de l'estimation d'énergie dans le cas d'une dégénérescence dans la zone hyperbolique et se base sur la construction d'un développement de type optique géométrique. En particulier, l'apparition d'une perte d'une demi-dérivée à l'intérieur du domaine est expliquée.

Dans le sous-paragraphe suivant on décrit donc les résultats connus concernant ces développements d'optique géométrique ainsi que la philosophie pour les construire.

### 1.2.2 Etude qualitative des solutions, développements d'optique géométrique.

Une fois que l'existence d'une solution pour le problème aux limites (1.7) est démontrée on peut essayer de déterminer des propriétés qualitatives de cette solution. Pour ce faire, on se restreint à étudier le problème aux limites (1.7) lorsque les termes sources sont des fonctions fortement oscillantes ; de tels problèmes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} L(\partial)u^\varepsilon = 0, \text{ sur } x_d \geq 0, t \geq 0, \\ Bu^\varepsilon|_{x_d=0} = g^\varepsilon, \text{ sur } x_d = 0, t \geq 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

où le terme source  $g^\varepsilon$  s'écrit sous la forme :

$$g^\varepsilon(t, x') := e^{i\frac{\varphi(t, x')}{\varepsilon}} g(t, x').$$

Le terme source sur le bord  $g^\varepsilon$  représente une oscillation rapide en fonction de la longueur d'onde  $\varepsilon$ , selon une phase  $\varphi$  et une amplitude  $g$ . La phase  $\varphi$  sera toujours dans ce mémoire une phase plane :

$$\varphi(t, x') := \underline{\tau}t + \underline{\eta} \cdot x',$$

où  $\underline{\tau} \in \mathbb{R}$  et  $\underline{\eta} \in \mathbb{R}^{d-1}$ . La fréquence  $(i\underline{\tau}, \underline{\eta}) \in \Xi_0$ , donc la matrice résolvante  $\mathcal{A}(i\underline{\tau}, \underline{\eta})$  a l'une des quatre structures décrites au sous-paragraphe précédent.

<sup>4</sup>A notre connaissance (sauf dans un cas bien particulier [BG07]) aucune estimation d'énergie a priori n'est connue pour une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii en zone de glancing. Cela est expliqué par le fait que le cas difficile de la construction de Kreiss est justement celui au voisinage des fréquences de glancing. La construction y est plus technique et donc plus difficile à adapter.

On cherche alors une solution approchée du problème aux limites (1.14) sous la forme d'un développement BKW (pour Brillouin-Kramers-Wentzel). Dans la suite de ce paragraphe, on va rappeler les principales idées qui sont utilisées pour construire le premier terme de ce développement. Plus précisément, on décrira les phases que l'on attend dans le développement, les différents types d'équations sur les amplitudes ainsi que l'ordre de résolution de ces équations. Ces deux points seront utilisés dans des contextes différents aux chapitres 2 et 6 de ce mémoire, et nécessiteront des adaptations spécifiques. Cependant, l'idée générale de la construction sera toujours identique. C'est pourquoi ce rappel nous semble être important pour faciliter la compréhension globale de ce manuscrit.

L'idée lorsque l'on cherche un développement BKW est de faire le pari que la solution hérite du caractère fortement oscillant des termes sources. On postule donc que le terme source fortement oscillant sur le bord génère des paquets d'ondes fortement oscillants à l'intérieur du domaine. On cherche donc une solution formelle du problème aux limites (1.14),  $u^\varepsilon$  sous la forme :

$$u^\varepsilon \sim \sum_{j=1}^K e^{\frac{i}{\varepsilon}(\varphi(t,x') + x_d \xi_d^j)} v_j^\varepsilon(t, x), \quad (1.15)$$

où les  $(\xi_d^j)_j$  seront déterminés par la suite et où l'on écrit les  $v_j^\varepsilon(t, x)$  sous forme de développements asymptotiques selon les puissances de  $\varepsilon$  :

$$v_j^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n,j}(t, x).$$

On injecte ensuite l'ansatz (1.15) dans l'équation d'évolution du problème aux limites (1.14), pour obtenir une cascade d'équations de la forme :

$$1 \leq j \leq K, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathcal{L}(d\varphi, \xi_d^j) u_{0,j} = 0, \\ i\mathcal{L}(d\varphi, \xi_d^j) u_{n+1,j} + L(\partial) u_{n,j} = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\mathcal{L}$  désigne le symbole de l'opérateur  $L(\partial)$  : pour  $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ ,

$$\mathcal{L}(\xi) := \xi_0 + \sum_{j=1}^d \xi_j A_j.$$

La première équation de la cascade (1.16) implique que l'amplitude principale  $u_{0,j}$  est polarisée sur  $\ker \mathcal{L}(d\varphi_j)$  ; en particulier, ce noyau doit être non trivial. En d'autres termes, la relation de dispersion<sup>5</sup> suivante doit être vérifiée :

$$\det(\mathcal{L}(d\varphi_j)) = 0.$$

En particulier, les  $\xi_d^j$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}(i\mathcal{T}, \eta)$  et peuvent donc être soit imaginaires pures, non dégénérées si le mode associé est hyperbolique, dégénérées si le mode associé est de glancing ou encore complexes de partie réelle non nulle. Dans tout ce manuscrit, on supposera que la fréquence  $(i\mathcal{T}, \eta)$  n'est pas de glancing ; on renvoie à [Wil96] et [Wil00] pour la construction du développement BKW dans le cas d'une fréquence de glancing.

---

<sup>5</sup>Dans le cas d'une phase  $\varphi$  non plane, on parle plutôt d'équation éikonale. Cette équation est de type Hamilton-Jacobi et admet donc a priori un temps maximal de résolution.

On note  $J \geq 0$ , le nombre de valeurs propres imaginaires pures de la matrice  $\mathcal{A}(i\mathcal{T}, \underline{\eta})$ , notées  $(\xi_d^j)_j$ , et on corrige l'expression de l'ansatz (1.15) de la façon suivante :

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{j=1}^J e^{i\frac{\varphi_j}{\varepsilon}} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n,j}(t, x) + \sum_{n \geq 0} e^{i\frac{\varphi}{\varepsilon}} \varepsilon^n U_n \left( t, x, \frac{x_d}{\varepsilon} \right), \quad (1.17)$$

où l'on a posé

$$\varphi_j(t, x) := \varphi(t, x') + \xi_d^j x_d.$$

Le nouvel ansatz (1.17), se compose de deux sommes, la première prend en compte les modes hyperboliques et la seconde les modes elliptiques. On remarquera aussi que l'oscillation dans la direction normale est spécifiée pour les modes hyperboliques, tandis que la décroissance dans la variable rapide  $X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}$  ne l'est pas pour les modes elliptiques. Ce choix est motivé par le fait que l'on s'attend à ce que les amplitudes associées aux modes elliptiques aient une décroissance exponentielle dans la variable normale. Ainsi, on peut traiter leur contribution sans différencier la valeur propre complexe à laquelle elles sont liées.<sup>6</sup>

Si on injecte le nouvel ansatz (1.17) dans l'équation d'évolution du problème (1.14), la cascade pour les amplitudes hyperboliques  $u_{n,j}$  est inchangée et on ajoute la cascade suivante pour les amplitudes elliptiques  $U_n$  :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(d\varphi_j)u_{0,j} = 0, & 1 \leq j \leq J, \\ i\mathcal{L}((d\varphi_j)u_{n+1,j} + L(\partial)u_{n,j}) = 0, & \forall n \geq 0, 1 \leq j \leq J, \\ L(\partial_{X_d})U_0 = 0, \\ L(\partial_{X_d})U_{n+1} + L(\partial)U_n = 0, & \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

où l'opérateur de dérivation dans la variable rapide  $L(\partial_{X_d})$  est défini par :

$$L(\partial_{X_d}) := A_d(\partial_{X_d} + \mathcal{A}(i\mathcal{T}, \underline{\eta})),$$

et permet de se ramener à une équation différentielle ordinaire, dans la variable rapide  $X_d$ , analogue à celle que l'on avait introduite pour étudier le caractère fortement bien posé du problème (1.10). Par conséquent, une solution de l'équation  $L(\partial_{X_d})U_0 = 0$  peut être calculée à condition que l'on connaisse la valeur de la trace  $U_{0|_{X_d=0}}$  (voir [Les07] pour une résolution rigoureuse). De la même manière, au prix d'une composition par des projecteurs bien choisis, le lemme de Lax [Lax57] permet, pour déterminer l'une des amplitudes  $u_{0,j}$ , de se ramener à résoudre une équation de transport :

$$(\partial_t + v_j \cdot \nabla_x) u = 0, \quad (1.19)$$

où  $v_j := (v_{j,1}, \dots, v_{j,d}) \in \mathbb{R}^d$  est la vitesse de groupe associée à la phase  $\varphi_j$  (cf. la définition 2.1.2 ou encore [Rau12], pour une définition précise de cet objet).

Dans le cas du problème aux limites standard, on doit distinguer deux cas selon le signe de  $v_{j,d}$ .

◊  $v_{j,d} < 0$  : le phénomène de transport dans l'équation (1.19) se fait alors de l'intérieur du domaine vers le bord (on parle alors de transport sortant, ou non causal). Par conséquent, la trace en  $\{x_d = 0\}$  de la solution sera déterminée par résolution de l'équation de transport (1.19), pour laquelle **aucune condition de bord** sur  $\{x_d = 0\}$  ne doit être imposée. On peut alors résoudre

---

<sup>6</sup>Choisir de ne pas spécifier la dépendance par rapport à la variable normale pour les modes elliptiques provient de [Les07]. Ceci constitue un léger avantage par rapport à la méthode de [Wil96] car on n'a pas ici besoin de supposer que la matrice  $\mathcal{A}(i\mathcal{T}, \underline{\eta})$  est diagonalisable sur les modes elliptiques.

ces équations avant toutes les autres en intégrant directement l'équation de transport (1.19) le long des caractéristiques.

◇  $v_{j,d} > 0$  :<sup>7</sup> le phénomène de transport dans l'équation (1.19) se fait alors du bord du domaine vers l'intérieur (on dit que ce transport est entrant ou causal). Par conséquent, la trace en  $\{x_d = 0\}$  de la solution a besoin d'être spécifiée pour résoudre l'équation de transport (1.19). En d'autres termes, on a **besoin d'une condition de bord** pour résoudre (1.19).

Pour déterminer cette condition de bord, on injecte l'ansatz (1.17) dans la condition de bord du problème aux limites (1.14), et l'on obtient :

$$B \left[ \sum_{j, v_{j,d} > 0} u_{0,j} + U_{0|_{x_d=0}} \right]_{|x_d=0} = G, \quad (1.20)$$

où le terme source  $G$  dépend de  $g$  et possiblement des amplitudes  $u_{0,j}$  associées à des vitesses de groupes sortantes (qui sont déjà déterminées).

Le point important pour obtenir la valeur de la trace  $u_{0,j|_{x_d=0}}$  pour une vitesse de groupe entrante est de remarquer que le sous-espace  $\ker \mathcal{L}(d\varphi_j)$  (sur lequel  $u_{0,j}$  est polarisée) est inclus dans le sous-espace stable  $E^s(i\tau, \eta)$  (voir par exemple [CG10] pour une preuve). Par conséquent, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme permet d'inverser le membre de gauche de (1.20) et donne la valeur des traces  $u_{0,j|_{x_d=0}}$  (encore une fois après avoir appliqué le projecteur adéquat). On peut donc résoudre l'équation de transport dans le cas d'une vitesse de groupe entrante ce qui détermine l'amplitude  $u_{0,j}$ .

De la même manière, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme permet d'obtenir la valeur de la trace  $U_{0|_{x_d=x_d=0}}$  et un relèvement de cette dernière en une trace sur  $U_{0|_{x_d=0}}$  permet de déterminer l'amplitude évanescence  $U_0$ . On reviendra plus en détail sur ce point dans le coeur du manuscrit.

La construction des amplitudes d'ordre plus élevé en  $\varepsilon$ ,  $u_{n,j}$  et  $U_n$  pour  $n \geq 1$ , se fait ensuite par décomposition de l'amplitude en une partie polarisée (dont la détermination suit les mêmes idées que pour l'amplitude principale) et d'une partie non polarisée qui dépend de façon explicite des amplitudes d'ordres inférieurs.

Une fois le développement BKW construit, le problème aux limites (1.14) étant linéaire et fortement bien posé, on montre alors facilement que le développement BKW converge bien (dans un certain sens) vers la solution exacte de (1.14).

On a mentionné à la fin du sous-paragraphe précédent que le chapitre 2 était consacré au calcul de développements BKW lorsque la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'était pas satisfaite. On expose donc succinctement comment le propos que l'on a tenu jusque ici se trouve modifié dans ce contexte. Le seul endroit (mais pas le moindre) où l'on a utilisé la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans l'étude précédente est lors de la détermination de la trace des amplitudes entrantes. Si la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est plus vérifiée pour la fréquence  $(i\tau, \eta)$  alors l'une des traces des amplitudes oscillantes  $u_{0,j}$  ou la trace de l'amplitude évanescence  $U_0$  s'écrit sous la forme  $\alpha(t, x')e$ , où  $e$  est un vecteur générateur de  $\ker B \cap E^s(i\tau, \eta)$ . Par conséquent, la condition de bord (1.20) ne permet pas de déterminer  $\alpha$ .

La méthode pour surmonter cette difficulté (voir [CG10] dans le cas où  $e$  est un mode hyperbolique de  $E^s(i\tau, \eta)$  et [Mar10] si  $e$  correspond à mode elliptique) consiste à étudier soigneusement la condition de bord vérifiée par les amplitudes d'ordre supérieur et d'en extraire une équation qui

<sup>7</sup>Le cas  $v_{j,d} = 0$  qui conduirait à une équation de transport dégénérée est ici exclu car on a supposé que la fréquence  $(i\tau, \eta)$  était hors de la zone de glancing.

permet de déterminer  $\alpha$ . On notera que dans [CG10] et [Mar10], bien que les techniques utilisées soient différentes, l'équation qui permet de déterminer  $\alpha$  est une équation de transport sur  $\{x_d = 0\}$ .

Le développement BKW, une fois sa convergence vers la solution exacte  $u^\varepsilon$  établie, est alors un formidable outil pour démontrer des propriétés qualitatives sur la solution  $u^\varepsilon$ . En effet, si on veut démontrer que la solution  $u^\varepsilon$  vérifie nécessairement une certaine propriété, on commence par raisonner par l'absurde. On choisit alors un terme source de manière à ce que le développement BKW associé vérifie la propriété souhaitée et puisque le développement BKW "est une bonne approximation" de la solution exacte (à condition que la vitesse de convergence soit assez grande et que les espaces dans lesquels se fait la convergence soient assez précis), cette dernière doit aussi vérifier la propriété. En pratique, cet argument est assez solide lorsque l'on s'intéresse à l'optimalité des pertes de dérivées pour les problèmes faiblement bien posés. Pour démontrer l'optimalité d'une perte d'une dérivée, il suffit alors de prendre un terme source en  $O(\varepsilon)$  et de montrer que le développement BKW associé est en  $O(1)$ .

### 1.3 Le problème à coin.

L'étude des problèmes à coin dans le cas général, c'est-à-dire pour un opérateur hyperbolique à multiplicité constante et des conditions de bord matricielles  $B_1$  et  $B_2$  génériques, débute en 1962 avec Sarason qui démontre un lemme "fort=faible" [Sar62]. On peut aussi citer [Pey65] qui par des arguments de régularisation établit cette identité fort=faible dans le cas particulier où les matrices  $A_1$  et  $A_2$  commutent. La question de l'estimation d'énergie a priori, et plus généralement du caractère fortement bien posé, est étudiée en 1973 par Osher [Osh73] puis est restée plus ou moins en suspens depuis les articles de l'an dernier de Huang et Temam [HT14a] et [HT14b]. Cependant, durant ces quarante ans, on peut toutefois citer de nombreux travaux pour établir le caractère fortement bien posé de l'équation des ondes avec des conditions de bords particulières. Ces papiers étant assez peu connus on se permet ici d'en donner une liste [BT96a]-[BT96b]-[KT80]-[KO71] et [Tan78]. A propos de la construction de solution pour l'équation d'Euler dans un pavé et avec des conditions de bord dissipatives on peut citer [GS01].

On peut aussi mentionner des techniques de régularisation elliptique pour résoudre le problème à coin à conditions de bord strictement dissipatives [Sar67] et [Hua0]. Ainsi que deux articles de Sarason pour les problèmes à coin symétrique [Sar70] et [Sar77].

Enfin, on peut aussi citer l'article [Pey75], dans lequel l'auteur obtient des résultats proches de ceux de [Hua0] sous une condition dite de torsion sur les  $A_j$ .

#### 1.3.1 Caractère fortement bien posé.

Le schéma de démonstration que l'on a choisi de suivre pour établir le caractère fortement bien posé du problème à coin est le même que pour le problème aux limites standard. C'est-à-dire, estimation d'énergie a priori, construction d'une solution faible et utilisation pour conclure d'un lemme de type "fort=faible".

Pour le dernier point, on a utilisé le résultat de Sarason, [Sar62]. En effet, dans le cas du problème à coin la technique de régularisation utilisée pour le problème aux limites standard semble difficile à adapter car on n'a pas de détermination régulière de la variable normale. En effet, il semble difficile de régulariser la solution faible dans  $d - 1$  directions tout en conservant les traces de cette solution.

Dans ce sous-paragraphe, on donnera des éléments de démonstration concernant l'estimation d'énergie a priori. Ce manuscrit ne contient pas de démonstration qui permet de conclure au caractère fortement bien posé dans le cadre général, mais apporte des avancées par rapport à l'état de la littérature. Avant de décrire ces avancées, on va présenter un cadre particulier pour lequel on peut tout de même conclure au caractère fortement bien posé.

Comme pour le cas du problème aux limites standard, un cadre d'étude plus simple est le cadre des problèmes à coin qui admettent des conditions strictement dissipatives sur chaque face du quart d'espace. Ainsi, l'estimation d'énergie a priori est, comme dans le cas du problème aux limites standard, facilement établie par un argument d'intégration par parties. La construction de la solution faible se base sur une adaptation des résultats de Lax et Phillips [LP60] qui permet de construire un problème dual qui admet des conditions de bord strictement dissipatives. La démonstration complète de ce résultat peut être trouvée au chapitre 4 de ce manuscrit.

Le caractère fortement bien posé d'un problème posé dans un rectangle, même lorsque ce dernier est à coefficients variables, dans le cas des conditions de bord strictement dissipatives, a aussi été établi récemment par Huang et Temam, d'abord pour l'équation de Saint-Venant [HT14b], puis pour un opérateur hyperbolique général [HT14a]. Dans ces articles, les auteurs utilisent le théorème de Hille-Yossida (dont on a mentionné l'efficacité pour le problème aux limites standard strictement dissipatif). Il nous semble toutefois assez difficile d'adapter leur méthode à un domaine non borné (sauf dans le cas particulier où la matrice  $A_1^{-1}A_2$  est diagonalisable à valeurs propres réelles) pour le problème dans le quart d'espace car un point important de leur démonstration se base sur l'inégalité de Poincaré.

On suppose maintenant que le problème à coin ne satisfait plus des conditions de bord strictement dissipatives mais seulement la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chaque face du bord (on montre facilement par des arguments de vitesse finie de propagation que cette hypothèse est nécessaire au caractère fortement bien posé du problème à coin). Et on veut démontrer l'estimation d'énergie a priori. La méthode que l'on décrit au chapitre 5 de ce mémoire est celle introduite par Osher dans [Osh73] et se base, comme dans le cas du problème aux limites standard, sur la construction d'un symétriseur de type Kreiss. Toutefois, le symétriseur construit par Osher n'est plus une matrice mais est un "vrai" opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . La construction de ce symétriseur sera détaillée au chapitre 5, on se contente ici d'en donner les éléments marquants.

Sans surprise, pour construire ce symétriseur, Osher introduit une nouvelle condition. La provenance de cette condition est la suivante : on suppose que le problème à coin homogène à l'intérieur, admet une solution  $u \in L^2$ . On peut alors prolonger cette solution par zéro pour les  $x_1$  négatifs pour obtenir une solution du problèmes aux limites dans le demi-espace  $\{x_2 \geq 0\}$ . On reprend l'étude du problème aux limites standard décrite dans le sous-paragraphe 1.2.1, par transformée de Laplace dans la variable temporelle et transformée de Fourier dans les variables spatiales tangentielles  $x_1 \leftrightarrow \eta_1$  et  $x' \leftrightarrow \eta = (\eta_3, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^{d-2}$  on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_2} u = \mathcal{A}_2(\sigma, \eta_1, \eta) u + A_2^{-1} A_1 u|_{x_1=0}, \text{ sur } x_2 \geq 0, \\ B_2 u|_{x_2=0} = 0, \text{ sur } x_d = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

D'après la formule de Duhamel, on peut décomposer cette solution  $u$  en une partie stable  $\Pi_2^s u$  et une partie instable  $\Pi_2^u u$  avec :

$$\Pi_2^s u(x_2) := e^{x_2 \mathcal{A}_2} \Pi_2^s u(0) + \int_0^{x_2} e^{(x_2-s) \mathcal{A}_2} \Pi_2^s A_2^{-1} A_1 u|_{x_1=0}(s) ds, \quad (1.22)$$

$$\Pi_2^u u(x_2) := - \int_{x_2}^{+\infty} e^{(x_2-s) \mathcal{A}_2} \Pi_2^u A_2^{-1} A_1 u|_{x_1=0}(s) ds, \quad (1.23)$$

où les projecteurs  $\Pi_2^s$  et  $\Pi_2^u$  sont les projecteurs sur les sous-espaces stable et instable de la matrice résolvante  $\mathcal{A}_2(\sigma, \eta_1, \eta)$ .

En particulier, l'équation (1.23) donne la valeur de la partie instable de la trace de la solution en  $\{x_2 = 0\}$  en fonction de la valeur de la trace de la solution en  $\{x_1 = 0\}$ . On applique ensuite la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme qui permet d'exprimer la partie stable de la trace en  $\{x_2 = 0\}$  en fonction de sa partie instable. On obtient donc la valeur de la trace  $u|_{x_2=0}$  en fonction de la valeur de la trace  $u|_{x_1=0}$  par une équation de la forme :

$$u|_{x_2=0} = T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)u|_{x_1=0}, \quad (1.24)$$

où  $T_{1 \rightarrow 2}(\tau, \eta)$  est un opérateur dont on donnera l'expression exacte au chapitre 5, plus précisément au sous-paragraphe 5.3.2.

Maintenant, en reprenant les mêmes calculs après avoir étendu la solution par zéro pour les  $x_2$  négatifs, on obtient une relation de la forme :

$$u|_{x_1=0} = T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)u|_{x_2=0} + Pg_1, \quad (1.25)$$

où  $P$  est un multiplicateur de Fourier et  $T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  un opérateur analogue à  $T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$ . La condition qu'Osher impose est donc, au vu des équations (1.24) et (1.25), la suivante :

**Hypothèse 1.3.1** *L'opérateur  $(I - T_{2 \rightarrow 1}T_{1 \rightarrow 2})(\sigma, \eta)$  est inversible sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . De plus, l'inverse est uniformément borné par rapport aux paramètres  $(\sigma, \eta)$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $(\sigma, \eta)$ , telle que*

$$\forall v \in L^2(\mathbb{R}_+), \|(I - T_{2 \rightarrow 1}T_{1 \rightarrow 2})(\sigma, \eta)^{-1}v\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Cette hypothèse supplémentaire semble malheureusement très difficile à vérifier en pratique. A notre connaissance, le seul cas où l'on arrive à expliciter l'opérateur  $(I - T_{2 \rightarrow 1}T_{1 \rightarrow 2})(\sigma, \eta)$  et à vérifier son inversibilité est l'exemple d'Osher de [Osh74a], qui est un système de deux équations de transports couplées seulement par les conditions de bord. Nos tentatives pour essayer d'expliciter l'opérateur  $(I - T_{2 \rightarrow 1}T_{1 \rightarrow 2})(\sigma, \eta)$  pour l'équation des ondes en dimension deux sont, à ce jour, restées infructueuses.

Toutefois, indépendamment de la question de la vérification de l'hypothèse 1.3.1, Osher montre que cette hypothèse est suffisante pour établir une estimation d'énergie a priori. Pour cela, Osher construit un opérateur symétriseur de type Kreiss. Le problème est que cette estimation comprend, a priori, de nombreuses pertes de dérivées, aussi bien sur les faces du domaine qu'à l'intérieur. Malheureusement, le nombre de pertes de dérivées n'est pas explicite. On semble donc être assez loin d'une estimation d'énergie a priori qui conduirait à un caractère fortement bien posé.

Une des contributions de ce travail est d'avoir compris que si, en plus de l'hypothèse 1.3.1, les opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$  étaient bornés sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , uniformément par rapport aux paramètres  $\sigma$  et  $\eta$ , alors l'estimation d'énergie démontrée par Osher dans [Osh73] est sans pertes, et est une estimation d'énergie a priori dont pourrait découler le caractère fortement bien posé.

Etablir le caractère uniforme de la borne des opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$  ne semble pas trivial. Cependant, on a bon espoir qu'une décomposition de ces opérateurs en opérateurs intégraux de Fourier puisse aider à avancer dans la démonstration de ce résultat (cf. [Dui11]). Un autre résultat de ce travail est d'avoir montré, sous une hypothèse technique sur la matrice  $A_1^{-1}A_2$ , le caractère borné (non uniforme) des opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$  sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . Ce résultat, bien que ne suffisant pas pour conclure, semble être de bon augure et nous permet d'être optimiste



quant au caractère uniformément borné des opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$ .

Concernant l'existence de la solution faible du problème à coin avec un opérateur hyperbolique général, la littérature comprend assez peu d'éléments de réponses. Dans le cas de l'équation des ondes, on peut tout de même citer [KT80] et [BT96a] qui construisent des solutions faibles, mais utilisent lors de cette construction assez fortement la structure particulière de l'équation des ondes. Ainsi leurs techniques semblent assez difficiles à adapter au cas général. On a donc décidé de reprendre le même schéma de démonstration que pour le problème aux limites, c'est-à-dire de construire un problème dual et de démontrer que ce dernier vérifie l'estimation d'énergie a priori.

Cette technique de démonstration n'est probablement pas nécessaire dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants. En effet, si on fait le parallèle avec les problèmes aux limites standards, construire une solution faible devrait pouvoir se faire "à la main" sans introduire un problème dual. Si on fait le parallèle avec le problème aux limites standard, il se peut que lors de cette construction on voit apparaître une version non uniforme de la condition d'Osher. Ceci serait un fort argument en faveur du caractère nécessaire de cette condition. Toutefois, si on veut à l'avenir démontrer le caractère fortement bien posé pour les problèmes à coin à coefficients variables, passer par un problème dual semble nécessaire.

La construction du problème dual ne pose pas particulièrement de problème, il suffit de reprendre la construction du problème dual pour un problème aux limites standard. Pour démontrer que ce problème ainsi construit vérifie l'estimation d'énergie a priori, il faut alors montrer qu'il satisfait les hypothèses sous lesquelles on pense pouvoir démontrer, à l'avenir, l'estimation d'énergie a priori pour le problème à coin primal. On doit donc vérifier que les analogues des opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$ , notés  $\tilde{T}_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  et  $\tilde{T}_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$ , sont uniformément bornés sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$  et que le problème à coin dual vérifie l'analogie de l'hypothèse 1.3.1.

Le premier point, si on arrive à l'établir pour le problème primal, passe sans grande difficulté au problème dual car, pour ainsi dire, les opérateurs pour le problème dual  $\tilde{T}_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$  et  $\tilde{T}_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$  ont exactement la même forme que les opérateurs du problème primal.

Le second point, c'est-à-dire que l'opérateur pour le problème dual  $I - (\tilde{T}_{2 \rightarrow 1} \tilde{T}_{1 \rightarrow 2})(\sigma, \eta)$  est uniformément borné sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$  pourrait à la limite être placé comme une hypothèse. Cependant, cela ne serait pas tout à fait satisfaisant. En effet, si on se rappelle de la situation pour le problème aux limites standards, on a mentionné que le problème aux limites standard primal vérifiait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme si et seulement si le problème aux limites standard dual la vérifiait. Ainsi, pour le problème aux limites standard, il suffit d'imposer seulement la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour le problème primal.

On pense que le même résultat est vrai pour la condition d'Osher, c'est-à-dire que le problème à coin primal vérifie la condition d'Osher si et seulement si le problème à coin dual vérifie la condition d'Osher. Si un tel résultat est effectivement vrai, alors on aura seulement besoin de supposer la condition d'Osher sur le problème primal pour conclure. Mais plus important, cela montrerait que la condition d'Osher est une condition bien adaptée au problème à coin et lui conférerait (en un certain sens) un caractère "intrinsèquement relié" au problème à coin. On pense donc que philosophiquement, un tel résultat serait un fort argument en faveur du caractère nécessaire de la condition d'Osher pour que le problème à coin soit fortement bien posé.

On n'a pas dans ce manuscrit ni construit une solution faible du problème à coin "à la main", ni démontré une telle équivalence. Ces points sont toujours en cours d'étude et constituent une perspective de ce travail de thèse. La principale difficulté pour construire une solution faible à la main est que bien que la condition d'Osher (cf. hypothèse (5.3.2)) nous donne des candidats naturels

pour les traces de la solution, il faut être en mesure de construire une solution dont les traces sont ces bons candidats. La difficulté pour démontrer que la condition d'Osher passe au problème dual est que par rapport à la démonstration pour le problème aux limites dual [BG07], on se place ici en dimension infinie et par conséquent, les mêmes arguments se généralisent pas si facilement.

### 1.3.2 Développements d'optique géométrique pour des problèmes à coin.

Dans ce sous-paragraphe on notera

$$\partial\Omega_1 := \{(t, 0, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}, \text{ et } \partial\Omega_2 := \{(t, x_1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\},$$

les deux faces du quart d'espace

$$\Omega := \{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}.$$

Le dernier chapitre de ce manuscrit donne une construction rigoureuse de développements d'optique géométrique pour des problèmes à coin. La littérature sur ce sujet se compose, à notre connaissance, essentiellement d'un article de 1975 de Sarason et Smoller [SS75]. Dans cet article, les auteurs donnent de précieux éléments pour comprendre comment un rayon de l'optique géométrique va rebondir sur les faces du domaine, et indiquent de possibles nouveaux phénomènes causés par la présence du coin. Toutefois, dans [SS75] aucune construction rigoureuse du développement d'optique géométrique n'est donnée.

Le lecteur peut s'étonner du fait que l'on se soit lancé dans la construction de développements d'optique géométrique alors que le caractère fortement bien posé du problème n'est pas démontré dans le cadre général. Nos motivations, qui expliquent ce choix, ont été les suivantes. Premièrement, on voulait comprendre l'article de Sarason et Smoller, en particulier le théorème principal qui donne un exemple de problème à coin qui n'est pas fortement bien posé. Deuxièmement, on sait tout de même que si le problème à coin admet des conditions de bord strictement dissipatives sur chaque face alors, il est fortement bien posé. Ainsi, on pourra démontrer la convergence des développements BKW que l'on a construit vers la solution exacte du problème dans ce cadre particulier. Enfin, et cela constitue peut-être la motivation qui a été la plus instructive, comme indiqué à la fin du sous-paragraphe précédent, on pense que le point qui fait obstacle à une démonstration du caractère fortement bien posé pour le problème à coin est que l'on ne comprend pas assez bien (à l'heure actuelle) la condition 1.3.1 et les opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\sigma, \eta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\sigma, \eta)$ . Or, on a déjà mentionné au sous-paragraphe 1.2.2 que pour le problème aux limites standard, une version micro-localisée de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme apparaissait naturellement lorsque l'on construisait des développements BKW. On s'est donc demandé si la même chose ne se produisait pas pour la condition d'Osher et le problème à coin, dans l'espoir de donner de nouveaux éléments concernant la condition d'Osher.

On pense que le chapitre 6 donne des éléments en faveur du fait qu'en effet, une version micro-localisée de la condition d'Osher apparaît bien dans la construction des développements BKW. Avant de décrire plus en avant ces éléments, on décrit un phénomène qui nous semble intéressant.

Dans le développement d'optique géométrique d'un problème à coin de seulement deux équations, linéaire à coefficients constants, il se peut que le nombre de phases générées par rebonds successifs entre les deux faces du quart d'espace soit infini, et ceci si l'on choisit un terme source sur le bord qui oscille selon une unique phase. Qu'un tel phénomène puisse se produire est assez surprenant car habituellement une infinité de phases dans le développement BKW est provoquée par des phénomènes de résonances et de génération d'harmoniques propres aux problèmes non linéaires (voir, par exemple, [JMR93]). À notre connaissance, l'exemple du sous-paragraphe 6.6 constitue

donc le premier exemple de développement d'optique géométrique avec une infinité de phases associé à un système linéaire.

Cependant, cette infinité de phases pose un problème. Il n'est pas clair de prime abord que la série définissant le développement d'optique géométrique ait un sens. En l'occurrence pour donner un sens au développement BKW tronqué du sous-paragraphe 6.6 on a été amené à faire des restrictions sur les conditions de bord du problème plus fortes que celles qui conduiraient à un problème strictement dissipatif pour chaque face et donc à un problème fortement bien posé. Ces restrictions ne sont toutefois probablement pas nécessaires si on se place dans un cadre strictement dissipatif sur chaque face et sont peut-être liées au fait que l'on n'a pas pris en compte le caractère oscillant de la série dans notre étude. Savoir si des restrictions sont nécessaires pour construire le développement BKW dans le cas d'une infinité de phases lorsque l'on impose seulement la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chaque face du domaine est néanmoins une question ouverte.

Un autre nouveau phénomène par rapport au développement BKW pour les problèmes aux limites standard est qu'il est possible d'avoir des phases autointeragissantes. On explicite ce terme sur l'exemple suivant : imaginons (un exemple vérifiant la construction ci-dessous sera donné au sous-paragraphe 6.9.1) un problème à coin avec un terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  générant un rayon d'optique géométrique oscillant selon une phase  $\varphi_1$  qui voyage vers la face  $\partial\Omega_2$ . Ce rayon sera réfléchi en (au moins) un rayon oscillant selon une phase  $\varphi_2$ . On suppose que ce nouveau rayon voyage vers la face  $\partial\Omega_1$  et y est réfléchi en un rayon associé à une phase  $\varphi_3$  qui voyage vers la face  $\partial\Omega_2$  et s'y réfléchit en un rayon oscillant selon  $\varphi_4$  voyageant vers  $\partial\Omega_1$ . Alors, il se peut parfaitement que lors du rebond contre  $\partial\Omega_1$  l'une des phase générées soit la phase initiale  $\varphi_1$ . Ainsi, en un certain sens, la phase  $\varphi_1$  s'autogénère car on la retrouve dans l'ensemble des phases qui ont été générées par ses rebonds. En terme d'allure des bicaractéristiques du problème à coin on voit donc apparaître un motif qui se répète.

Le théorème principal du chapitre 6 est une construction rigoureuse d'un développement BKW lorsque de telles phases autointeragissantes sont présentes. La démonstration de ce théorème repose sur les idées suivantes. On commence par appliquer un procédé qui nous permet de déterminer toutes les phases réelles,  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  que l'on s'attend à pouvoir générer par rebonds d'une phase oscillante sur l'une des faces du domaine. Afin de prévenir tout problème de définition du développement BKW, on fait l'hypothèse que le nombre de phases générées est fini, ce qui est le cas sur certains exemples. On postule alors un ansatz de la forme :

$$u^\varepsilon \sim \sum_{k=1}^K e^{i\frac{\varphi_k}{\varepsilon}} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n,k} + a.t.,$$

où le sigle *a.t.* désigne des amplitudes liées à des phases complexes. La détermination rigoureuse de ces amplitudes sera faite au chapitre 6, et on ne pense pas qu'il soit pertinent de la décrire ici.

On injecte ensuite l'ansatz dans le problème à coin et l'on obtient une cascade d'équations. La question maintenant est de trouver une manière de résoudre cette cascade d'équations. Ceci revient à trouver un ordre de résolution des équations et en particulier à isoler une équation que l'on va résoudre avant les autres, pour initialiser la résolution. Le problème est que, puisque l'ansatz que l'on a choisi contient des phases autointeragissantes, l'ordre n'est pas aussi immédiat que dans le cas du problème aux limites standard, ou même du problème à coin sans phases d'autointeractions.

On a toutefois montré (ce qui constitue la partie technique de la démonstration du théorème 6.9.2) que l'on pouvait toujours exprimer, au prix d'un certain nombre de résolutions d'équations de transport, une amplitude non autointeragissante quelconque en fonction de l'une des amplitudes

pour une phase autointeragissante. Donc, pour déterminer l'intégralité des amplitudes dans le développement BKW, il suffit de déterminer les amplitudes liées aux phases autointeragissantes et l'on est ensuite libre de l'ordre de résolution des autres équations dans la cascade.

La détermination des amplitudes autointeragissantes passe par la résolution d'une nouvelle équation d'amplitude qui s'écrit sous la forme :

$$(I - T)u = G, \quad (1.26)$$

où  $u \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ ,  $G \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  et où  $T$  est un opérateur sur  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  qui s'écrit sous la forme :

$$(Tu)(t, x) := Su(t - \alpha x, \beta x). \quad (1.27)$$

Les expressions des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $S$  sont explicitement calculables. On retiendra juste ici que  $\beta$  est le rapport des pentes des vitesses de groupe des phases autointeragissantes et que  $S$  est une composée de matrices et de projecteurs qui prend en compte les coefficients de réflexion d'un rayon lors d'un rebond faisant passer d'une phase autointeragissante à une autre.

On peut alors montrer qu'une condition suffisante (et aussi nécessaire dans une bonne majorité des cas) pour que l'opérateur  $(I - T)$  soit inversible sur  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  est :

$$|S| < \sqrt{\beta},$$

condition qui signifie que l'amplification de l'énergie d'un rayon lors des rebonds ne doit pas dépasser un certain seuil. En d'autres termes, il s'agit d'une restriction sur les conditions de bord du problème à coin.

Sous cette hypothèse on peut déterminer les amplitudes liées aux phases autointeragissantes et donc l'intégralité des amplitudes du développement BKW.

Il est intéressant de remarquer que l'équation (1.26), que l'on a besoin de résoudre pour construire le développement BKW, est exactement de la même forme que la condition d'Osher 1.3.1 que l'on pense nécessaire pour démontrer le caractère fortement bien posé du problème à coin. On pense que, par analogie avec la construction des développements BKW pour des problèmes aux limites standards, la condition d'inversibilité pour résoudre (1.26) doit être une version microlocale de la condition d'Osher 1.3.1.

Une démonstration de ce résultat, qui pourrait passer par une décomposition de l'opérateur  $T_{2 \rightarrow 1} T_{1 \rightarrow 2}(\tau, \eta)$  en une somme d'opérateurs intégraux de Fourier, est la perspective de ce travail doctoral qui nous paraît la plus intéressante. En effet, si un tel résultat était vrai, cela donnerait un très fort argument en faveur du fait que la condition d'Osher 1.3.1 est nécessaire pour le caractère fortement bien posé du problème à coin.

## 1.4 Organisation du manuscrit.

Sans compter ce chapitre d'introduction, ce manuscrit se compose de cinq chapitres. Les chapitres 2 et 3 traitent de problèmes aux limites hyperboliques standards, tandis que les chapitres 4, 5 et 6 traitent de problèmes aux limites dans un quart d'espace.

Les résultats de ces chapitres sont, dans une très grande mesure, indépendants les uns des autres. C'est pourquoi, on a adopté le parti de rendre autant que possible chaque chapitre autosuffisant pour éviter les renvois fréquents au début du manuscrit. Par conséquent, les hypothèses sous lesquelles

s'appliquent les résultats, bien que pouvant être très semblables, voir même analogues, d'un chapitre à l'autre, seront rappelés dans chaque chapitre. On espère que ce choix ne donnera pas un sentiment de redondance au lecteur.

Pour finir cette introduction, on donne ici un bref résumé des chapitres de ce manuscrit :

- **Chapitre 2** : On construit des développements BKW pour des problèmes aux limites standards faiblement bien posés pour lesquels la dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme se fait sur un mode elliptique. Deux situations sont prises en compte : ou bien il n'y a que des modes elliptiques, ou bien des modes hyperboliques cohabitent avec les modes elliptiques. On utilise ensuite ces développements BKW pour démontrer l'optimalité des estimations d'énergie démontrées dans ces cas de figure. En particulier, ceci montre que le phénomène d'instabilité est plus prononcé en présence d'un mode hyperbolique. On a ainsi une classification complète des estimations d'énergie à perte quand la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère en dehors de la zone de glancing.

- **Chapitre 3** : On montre que pour les problèmes aux limites faiblement bien posés pour lesquels la dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme se fait dans la zone hyperbolique, la vitesse de propagation de l'information est finie. Cette démonstration se base sur le principe de Holmgren. En raison de phénomènes de transport le long du bord du domaine propre à de tels problèmes faiblement bien posés, la vitesse de propagation peut être supérieure à celle du problème de Cauchy. De plus, la vitesse maximale que l'on trouve est optimale.

- **Chapitre 4** : On donne une démonstration complète du caractère fortement bien posé des problèmes à coin qui admettent des conditions de bord strictement dissipatives sur chaque face. Cette démonstration se décompose en deux parties, d'abord l'établissement d'une estimation d'énergie a priori, ensuite la construction d'une solution faible.

- **Chapitre 5** : On étudie le caractère fortement bien posé des problèmes à coin dans le cas général, c'est-à-dire que l'on suppose la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme satisfaite sur chaque face du quart d'espace. On reprend l'analyse d'Osher qui, sous la condition 1.3.1, construit un symétriseur qui donne une estimation d'énergie a priori. Une condition suffisante pour rendre cette estimation d'énergie sans pertes est identifiée.

- **Chapitre 6** : On construit rigoureusement des développements BKW pour des problèmes à coin. La première partie de ce chapitre traite des systèmes à deux équations pour lesquels la construction est plus facile car on dispose d'un ordre de résolution naturel. Dans cette première partie, on montre sur des exemples l'existence de différents phénomènes comme la concentration de rayons au coin et/ou la génération d'un nombre infini de phases. Dans la seconde partie, on démontre un théorème de construction pour des systèmes à  $N$  équations qui peuvent admettre des phases autointeragissantes. Cette nouvelle difficulté nous amène à résoudre une nouvelle équation d'amplitude de la forme (1.26). Enfin, une condition suffisante et nécessaire (dans la majorité des cas) est donnée pour que l'on puisse résoudre (1.26) et ainsi résoudre toute la cascade BKW. On revient pour finir sur l'exemple de Sarason et Smoller [SS75] et l'on y explique de façon rigoureuse le phénomène de "blowup" décrit par les auteurs.

## Chapitre 2

# Développements d'optique géométrique et saturations d'énergie.

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans la revue *Differential Integral Equations*, [Ben14b].

### 2.1 Description du problème.

Le but de ce chapitre est de construire rigoureusement un développement d'optique géométrique pour un problème aux limites hyperbolique à coefficients constants (voir système (2.1)) ne vérifiant pas la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. On utilisera ensuite ce développement d'optique géométrique pour étudier la régularité de la solution de ce problème par rapport à la régularité des termes sources.

La condition de Kreiss-Lopatinskii [Kre70] uniforme est la clé de voûte dans l'étude des problèmes aux limites hyperboliques. En effet, cette condition qui affirme qu'aucun mode normal n'est solution de la condition de bord homogène, est nécessaire et suffisante pour que le problème aux limites (2.1) soit fortement bien posé. Par fortement bien posé, on entend que le problème aux limites admet une unique solution qui vérifie de plus une estimation d'énergie de la forme :

$$\gamma \|u\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \right),$$

c'est-à-dire sans perte de dérivées entre les termes sources  $f$  et  $g$  et la solution du problème  $u$ .

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéressera donc à des problèmes aux limites pour lesquels la condition de Kreiss-Lopatinskii dégénère sur le bord du demi-espace des fréquences. Les différentes dégénérescences que l'on considèrera, et qui ont été brièvement décrites dans l'introduction, seront rendues précises au sous-paragraphe 2.1.2.

On retiendra dans un premier temps que les développements d'optique géométrique sont intrinsèquement reliés aux quatre différentes structures de la matrice résolvante cf. [[Mét00]-[Kre70]], on a alors quatre types de fréquences possibles : les fréquences elliptiques, les hyperboliques, les elliptico-hyperboliques et enfin les fréquences de glancing.

La littérature sur les développements d'optique géométrique pour les problèmes aux limites hyperboliques est abondante. On peut citer de façon non exhaustive, d'une part les travaux utilisant la condition de Kreiss-Loaptinskii uniforme, comme par exemple, Williams [Wil96] qui établit le développement BKW pour tous les types de fréquences possibles dans un cadre non caractéristique et Lescarret [Les07] qui construit le développement BKW pour des fréquences elliptico-hyperboliques

pour des problèmes aux limites non linéaires dans le cas caractéristique. Et d'autre part, les travaux utilisant des versions affaiblies de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, par exemple Marcou [Mar10] qui travaille avec des problèmes non caractéristiques, homogènes et non linéaires quand la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère pour une fréquence elliptique et Coulombel-Guès [CG10] qui construisent le développement BKW pour des problèmes linéaires, non caractéristiques lorsque la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est violée sur une fréquence hyperbolique.

On travaille ici avec des problèmes non caractéristiques à coefficients constants pour lesquels la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est pas vérifiée pour une ou (des) fréquence elliptique ou elliptico-hyperbolique. Plus particulièrement on s'intéressera à l'influence de la zone de dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii sur les estimations d'énergie du problème aux limites (2.1). En effet, il a été montré notamment par Sablé-Tougeron et Coulombel que, malgré le fait que la condition de Kreiss-Lopatinskii ne soit pas vérifiée de façon uniforme, le problème aux limites (2.1) peut être faiblement bien posé. Par faiblement bien posé, on entend que la solution  $u$  du problème aux limites (2.1) admet une estimation d'énergie avec perte de dérivées de la forme :

$$\|u\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{H^{s_1}_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{H^{s_2}_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \right),$$

où les valeurs de  $s_1, s_2$  dépendent de la zone dans laquelle la condition de Kreiss-Lopatinskii est violée.

Par exemple, Sablé-Tougeron dans [ST88] a montré que pour le cas où la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans la zone elliptique, on pouvait avoir une estimation d'énergie avec perte d'une dérivée sur le bord et aucune perte à l'intérieur. Coulombel [Cou02] a montré que dans le cas où la dégénérescence a lieu dans la zone hyperbolique (resp. elliptico-hyperbolique) on pouvait démontrer une estimation d'énergie avec perte d'une dérivée sur le bord et d'une à l'intérieur (resp. une sur le bord et une demi à l'intérieur).

De plus, dans un travail plus récent [CG10] Coulombel et Guès ont montré que dans la zone hyperbolique une estimation d'énergie avec perte d'une dérivée à l'intérieur et d'une sur le bord était optimale. On se propose donc d'établir l'optimalité des estimations d'énergie précédemment décrites dans le cas des zones elliptique et elliptico-hyperbolique. On traite donc dans ce chapitre deux des trois derniers cas restants concernant les différentes possibilités de dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. Il n'y a aucun résultat général, du moins à notre connaissance, concernant le caractère faiblement bien posé dans le cas restant c'est-à-dire d'une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone de glancing.

L'optimalité des estimations d'énergie sera démontrée en utilisant les développements d'optique géométrique pour saturer les estimations d'énergie. Par conséquent, après des considérations générales sur le problème aux limites (2.1), on construira les développements d'optique géométrique pour des fréquences elliptiques et elliptico-hyperboliques dans les paragraphes 2.2 et 2.3 respectivement. Puis dans le paragraphe 2.4 on montrera l'optimalité des estimations d'énergie associées à ces problèmes.

En particulier, comme on le verra, pour démontrer l'optimalité de l'estimation d'énergie dans le cas elliptico-hyperbolique on aura besoin d'une hypothèse technique. Cette dernière est vérifiée pour tous les problèmes aux limites ayant un sens physique que l'on connaisse et sera discutée au sous-paragraphe 2.5.1. On rassemble aussi dans le paragraphe 2.5 une classification des différents types de problèmes aux limites faiblement bien posés ainsi, qu'à titre d'exemple, une étude de l'équation d'Euler linéarisée.

### 2.1.1 Quelques notations.

Dans tout ce qui suit, on notera :

- Pour  $T > 0$ ,

$$\Omega_T := \left\{ (t, x', x_d) \in ]-\infty, T] \times \mathbb{R}^d \text{ avec } x_d \geq 0 \right\},$$

le demi espace dans lequel est posé le problème aux limites (2.1) ci-dessous.

Le bord en espace de  $\Omega_T$ , c'est-à-dire  $\{(t, x) \in \Omega_T \text{ avec } x_d = 0\}$ , sera noté  $\partial\Omega_T$ .

- Pour  $s$  réel,  $H_\gamma^s(\Omega_T)$  sera la notation pour l'espace de Sobolev à poids exponentiel défini par

$$H_\gamma^s(\Omega_T) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega_T) \mid e^{-\gamma t} u \in H^s(\Omega_T) \right\},$$

que l'on munit des normes à poids :

$$\|\cdot\|_{H_\gamma^s(\Omega_T)} := \|e^{-\gamma t} \cdot\|_{H^s(\Omega_T)}.$$

On procède de même pour les espaces  $H_\gamma^s(\partial\Omega_T)$ .

On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(\partial)u^\varepsilon = f^\varepsilon, \text{ dans } \Omega_T, \\ Bu|_{x_d=0}^\varepsilon = g^\varepsilon, \text{ sur } \partial\Omega_T, \\ u|_{t \leq 0}^\varepsilon = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où on a posé

$$L(\partial) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j,$$

avec pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,  $A_j \in \mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbf{M}_{p \times N}(\mathbb{R})$  (la valeur de  $p$  sera rendue explicite au sous-paragraphe 2.1.2) et où l'inconnue  $u^\varepsilon$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}^N$ . La forme des termes sources  $f^\varepsilon$ ,  $g^\varepsilon$  sera déterminée ci-dessous (plus précisément au sous-paragraphe 2.1.2).

### 2.1.2 Hypothèses pour assurer le caractère bien posé.

Comme indiqué dans l'introduction, le cadre d'étude est celui d'un système hyperbolique à multiplicité constante à bord non caractéristique pour lequel la condition de Kreiss-Lopatinskii faible est vérifiée. Mais on supposera que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans la zone elliptique, ou bien, dans une zone où co-existent des modes elliptiques et des modes hyperboliques.

#### Hypothèses sur l'équation d'évolution.

Avant toute chose, il faut s'assurer que le problème aux limites (2.1) est bien hyperbolique dans un certain sens. Dans la suite de ce chapitre, on considèrera un système hyperbolique à multiplicité constante c'est-à-dire que l'on suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée.

**Hypothèse 2.1.1** *Il existe un entier positif  $M$ , des fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  à valeurs réelles ainsi que des entiers positifs  $\nu_1, \dots, \nu_M$  tels que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \det \left( \tau + \sum_{j=1}^d \xi_j A_j \right) = \prod_{k=1}^M (\tau + \lambda_k(\xi))^{\nu_k},$$

avec  $\lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_M(\xi)$  et telles que les valeurs propres  $\lambda_k(\xi)$  de  $\sum_{j=1}^d \xi_j A_j$  sont semi-simples.



On restreindra de plus l'étude aux systèmes à bord non caractéristique ; c'est pourquoi on fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.1.2** *La matrice  $A_d$  est inversible.*

### De la forme du sous-espace stable.

On suppose vérifiée l'hypothèse classique selon laquelle  $B \in \mathbf{M}_{p \times N}(\mathbb{R})$  est de rang maximal  $p$ , où  $p$  est le nombre de valeurs propres positives de  $A_d$ .

On introduit la partition suivante de l'espace des fréquences :

$$\begin{aligned}\Xi &:= \left\{ \zeta = (\sigma = \gamma + i\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \gamma \geq 0 \right\} \setminus \{0\}, \\ \Xi_0 &:= \Xi \cap \{\gamma = 0\}.\end{aligned}$$

La matrice résolvante associée au problème aux limites (2.1) est obtenue après transformée de Fourier en espace tangentiel et transformée de Laplace en temps dans l'équation d'évolution de (2.1). Elle s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{A}(\zeta) = -A_d^{-1} \left( \sigma I + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right). \quad (2.2)$$

On note  $E_-(\zeta)$  le sous-espace stable et  $E_+(\zeta)$  le sous-espace instable associé à la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Le lemme suivant décrit la structure du sous-espace stable lorsque la partie réelle de  $\sigma$  reste strictement positive.

**Lemme 2.1.1 (Hersh)** *[Her63] Pour tout  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ , la matrice résolvante (2.2) n'admet pas de valeur propre imaginaire pure. De plus, le sous-espace stable  $E_-(\zeta)$  est de dimension  $p$ . Le sous-espace instable  $E_+(\zeta)$  est lui de dimension  $N - p$ .*

Cependant dans le cas où  $\zeta \in \Xi_0$ , le lemme précédent n'est plus suffisant pour décrire la forme de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ . On a besoin d'un autre résultat. Ce dernier est initialement dû à Kreiss [Kre70] puis a été généralisé par Métivier aux systèmes hyperboliques à multiplicité constante [Mét00].

**Théorème 2.1.1 [Structure par blocs]** *Si le problème aux limites (2.1) vérifie les hypothèses 2.1.1 et 2.1.2, alors pour tout  $\underline{\zeta} \in \Xi$  il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Xi$ , un entier positif  $L$ , des entiers positifs  $\varrho_1, \dots, \varrho_L$  vérifiant  $N = \varrho_1 + \dots + \varrho_L$  et enfin une matrice  $T$  inversible et régulière sur  $\mathcal{V}$  tels que :*

$$\forall \zeta \in \mathcal{V}, T(\zeta)^{-1} \mathcal{A}(\zeta) T(\zeta) = \text{diag}(\mathcal{A}_1(\zeta), \dots, \mathcal{A}_L(\zeta)),$$

où les  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  sont des matrices de taille  $\varrho_j$  satisfaisant l'une des alternatives suivantes :

- i) Tous les éléments dans le spectre de  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  ont une partie réelle strictement négative.
- ii) Tous les éléments dans le spectre de  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  ont une partie réelle strictement positive.
- iii)  $\varrho_j = 1$ ,  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta}) \in i\mathbb{R}$  et

$$\partial_\gamma \mathcal{A}_j(\underline{\zeta}) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- iv)  $\varrho_j > 1$ , il existe  $k_j \in i\mathbb{R}$  tel que la matrice  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  s'écrive sous la forme :

$$\mathcal{A}_j(\underline{\zeta}) = \begin{bmatrix} k_j & i & 0 \\ & \ddots & i \\ 0 & & k_j \end{bmatrix},$$

où le coefficient en bas à gauche de  $\partial_\gamma \mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est un réel non nul.

Ce théorème permet de décrire les quatre formes de la matrice résolvante (2.2) qui peuvent se produire en une fréquence de  $\Xi_0$ . En effet, on remarque pour cela qu'étant donné que les valeurs propres de partie réelle non nulle sont conjuguées alors s'il existe un bloc de type  $i$ ) (resp.  $ii$ ) dans la décomposition donnée dans le théorème 2.1.1, alors nécessairement il existe aussi un bloc de type  $ii$ ) (resp.  $i$ ). Les deux blocs considérés sont alors de même taille.

**Définition 2.1.1** *On note :*

- $\mathcal{E}$  l'ensemble des fréquences elliptiques, c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 2.1.1 soit vérifié avec un bloc de type  $i$ ) et un bloc de type  $ii$ ) uniquement.
- $\mathcal{H}$  l'ensemble des fréquences hyperboliques, c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 2.1.1 soit vérifié avec des blocs de type  $iii$ ) uniquement.
- $\mathcal{EH}$  l'ensemble des fréquences elliptico-hyperboliques, c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 2.1.1 soit vérifié avec un bloc de type  $i$ ), un bloc de type  $ii$ ) et au moins un bloc de type  $iii$ ) mais aucun bloc de type  $iv$ ) .
- $\mathcal{G}$  l'ensemble des fréquences de "glancing", c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 2.1.1 soit vérifié avec au moins un bloc de type  $iv$ ).

Avec ces définitions on a la décomposition de  $\Xi_0$  suivante :

$$\Xi_0 = \mathcal{E} \cup \mathcal{EH} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{G}.$$

Dans la suite de ce chapitre, comme indiqué dans l'introduction, on se concentrera sur les fréquences appartenant aux ensembles  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{EH}$ . Ainsi dans les deux cas il existera toujours un bloc de type  $i$ ) et un bloc de type  $ii$ ) dans la décomposition de la matrice résolvante  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$ .

**Remarque** Une condition nécessaire pour l'existence d'une fréquence elliptique est que le nombre d'équations du système (2.1)  $N$ , soit pair. En effet, pour une telle fréquence il n'y a qu'un bloc de type  $i$ ) et un bloc de type  $ii$ ) et ces deux blocs sont de même taille.

Le théorème 2.1.1 a une autre conséquence importante. Grâce à lui, on peut prolonger les sous-espaces  $E_{\pm}(\underline{\zeta})$  par continuité aux fréquences de  $\Xi_0$  (voir [Kre70]-[Mét00]). De plus, si on fixe  $\underline{\zeta} \in \Xi_0 \setminus \mathcal{G}$  on a les décompositions suivantes :

$$\mathbb{C}^N = E_{-}(\underline{\zeta}) \oplus E_{+}(\underline{\zeta}), \quad (2.3)$$

et

$$E_{\pm}(\underline{\zeta}) = E_{\pm}^e(\underline{\zeta}) \oplus E_{\pm}^h(\underline{\zeta}), \quad (2.4)$$

où  $E_{-}^e(\underline{\zeta})$  (resp.  $E_{+}^e(\underline{\zeta})$ ) est le sous-espace propre généralisé associé aux valeurs propres de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  de partie réelle strictement négative (resp. positive), et où les espaces  $E_{\pm}^h(\underline{\zeta})$  sont des sommes de sous-espaces propres associés à certaines valeurs propres imaginaires pures de la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$ . Plus précisément, sous les mêmes notations qu'au théorème 2.1.1, aux valeurs propres de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  telles que  $\partial_{\gamma} \mathcal{A}_j(\underline{\zeta}) < 0$ .

La structure des sous-espaces  $E_{\pm}^h(\underline{\zeta})$  peut aussi être rendue explicite. En effet, soit  $i\omega_m$  une valeur propre imaginaire pure de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  avec  $\underline{\zeta} = (i\tau, \underline{\eta})$ , alors  $i\omega_m$  vérifie la relation de dispersion :

$$\det(\tau I + A(\underline{\eta}, \omega_m)) = 0.$$

Par conséquent puisque l'opérateur  $L(\partial)$  est hyperbolique à multiplicité constante (cf. hypothèse 2.1.1), il existe un indice  $k_m$  tel que

$$\tau + \lambda_{k_m}(\underline{\eta}, \omega_m) = 0, \quad (2.5)$$

où la valeur propre  $\lambda_{k_m}(\eta, \omega_m)$  est régulière par rapport aux variables  $\eta$  et  $\omega_m$ . L'équation (2.5) motive la définition suivante :

**Définition 2.1.2** On définit l'ensemble des indices entrants, noté  $\mathcal{I}$  (pour "incoming"), comme suit ;  $m \in \mathcal{I}$  si pour  $\lambda_{k_m}$  définie en (2.5) on a

$$\partial_{\eta_d} \lambda_{k_m}(\underline{\eta}, \underline{\omega}_m) > 0.$$

On définit de même l'ensemble des indices sortants, noté  $\mathcal{O}$  (pour "outcoming"), comme suit ;  $m \in \mathcal{O}$  si  $\lambda_{k_m}$  vérifie

$$\partial_{\eta_d} \lambda_{k_m}(\underline{\eta}, \underline{\omega}_m) < 0.$$

Enfin, on appelle  $v_m := \nabla \lambda_{k_m}(\underline{\eta}, \underline{\omega}_m)$  la vitesse de groupe associée à la phase

$$\varphi_m(t, x) := \tau t + \underline{\eta} \cdot x' + \underline{\omega}_m x_d.$$

Cette définition permet de donner la décomposition du sous-espace stable hyperbolique suivante :

**Lemme 2.1.2** Pour tout  $\underline{\zeta} \in (\mathcal{EH} \cup \mathcal{H})$ , on a :

$$E_-^h(\underline{\zeta}) = \oplus_{m \in \mathcal{I}} \ker \mathcal{L}(\tau, \underline{\eta}, \underline{\omega}_m), \text{ et } E_+^h(\underline{\zeta}) = \oplus_{m \in \mathcal{O}} \ker \mathcal{L}(\tau, \underline{\eta}, \underline{\omega}_m),$$

où pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathcal{L}(\xi_0, \dots, \xi_d) := \xi_0 I + \sum_{j=1}^d \xi_j A_j.$$

On renvoie à [CG10] pour une preuve de ce lemme.

On termine ce paragraphe en introduisant des projecteurs qui rendront service par la suite.

**Définition 2.1.3** Soit  $\zeta \in \mathcal{E} \cup \mathcal{EH} \cup \mathcal{H}$ . Dans les décompositions (2.3) et (2.4), on pose  $\Pi_e^\pm(\zeta) := \Pi_e^\pm$  le projecteur sur  $E_\pm^e(\zeta)$  et  $\Pi_m(\zeta) := \Pi_m$  le projecteur sur  $\ker \mathcal{L}(\zeta, \omega_m)$ . De plus, on introduit  $R_m(\zeta) := R_m$  le pseudo-inverse de  $\mathcal{L}(\zeta, \omega_m)$  vérifiant :

$$\begin{cases} R_m \mathcal{L}(\zeta, \omega_m) = I - \Pi_m, \\ \Pi_m R_m = 0. \end{cases}$$

### Hypothèses sur la condition de bord.

On commence par énoncer la condition dite de Kreiss-Lopatinskii (ou condition de Kreiss-Loatinskii faible) qui, on le rappelle, est nécessaire pour assurer le caractère bien posé du problème aux limites (2.1):

**Définition 2.1.4** La condition de Kreiss-Lopatinskii faible est vérifiée si :

$$\forall \zeta \in (\Xi \setminus \Xi_0), \quad \ker B \cap E_-(\zeta) = \{0\}.$$

Comme indiqué dans l'introduction on s'intéresse ici à des problèmes aux limites pour lesquels la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est pas vérifiée. Cette violation de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme peut se produire selon l'une des deux façons distinctes décrites ci-dessous.

Dans le cas d'un défaut de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone elliptique, on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

**Hypothèse 2.1.3** 1) *La condition de Kreiss-Lopatinskii faible est vérifiée.*

2) *Soit une fréquence  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telle que  $\ker B \cap E_-(\underline{\zeta}) \neq \{0\}$  alors  $\underline{\zeta} \in \mathcal{E}$ . Et de telles fréquences  $\underline{\zeta}$  existent.*

3) *Soit  $\underline{\zeta} \in \mathcal{E}$  telle que  $\ker B \cap E_-(\underline{\zeta}) \neq \{0\}$  alors, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Xi$ , une base  $(E_1, \dots, E_p)(\underline{\zeta})$  de  $E_-(\underline{\zeta})$  régulière sur  $\mathcal{V}$ , une matrice inversible de taille  $p$ , notée  $P(\underline{\zeta})$ , régulière sur  $\mathcal{V}$  et enfin une fonction  $\theta$  régulière sur  $\mathcal{V}$  à valeurs réelles tels que la propriété suivante soit vérifiée :*

$$\forall \underline{\zeta} \in \mathcal{V}, B[E_1, \dots, E_p](\underline{\zeta}) = P(\underline{\zeta}) \text{diag}(\gamma + i\theta(\underline{\zeta}), 1, \dots, 1).$$

Dans le cas où la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est pas vérifiée dans la zone elliptico-hyperbolique les conditions qui doivent être vérifiées sont assez semblables à celles du cas précédent. En effet, on suppose alors :

**Hypothèse 2.1.4** 1) *La condition de Kreiss-Lopatinskii faible est vérifiée.*

2) *Soit  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telle que  $\ker B \cap E_-(\underline{\zeta}) \neq \{0\}$  alors  $\underline{\zeta} \in \mathcal{EH}$ . Et de telles fréquences  $\underline{\zeta}$  existent.*

3) *Soit  $\underline{\zeta} \in \mathcal{EH}$  telle que  $\ker B \cap E_-(\underline{\zeta}) \neq \{0\}$  alors :*

◊  $E_-(\underline{\zeta}) \cap \ker B = E_-^e(\underline{\zeta}) \cap \ker B$ .

◊ *Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Xi$ , une base  $(E_1^e, \dots, E_{p-r}^e)(\underline{\zeta})$  de  $E_-^e(\underline{\zeta})$  régulière dans  $\mathcal{V}$ , une base  $(E_1^h, \dots, E_r^h)(\underline{\zeta})$  de  $E_-^h(\underline{\zeta})$  régulière dans  $\mathcal{V}$ , une matrice inversible de taille  $p$ ,  $P(\underline{\zeta})$  régulière sur  $\mathcal{V}$  et enfin une fonction  $\theta$  régulière sur  $\mathcal{V}$  à valeurs réelles tels que la propriété suivante soit vérifiée :*

$$\forall \underline{\zeta} \in \mathcal{V}, B \begin{bmatrix} E_1^e, \dots, E_{p-r}^e, E_1^h, \dots, E_r^h \end{bmatrix}(\underline{\zeta}) = P(\underline{\zeta}) \text{diag}(\gamma + i\theta(\underline{\zeta}), 1, \dots, 1).$$

**Remarque** L'hypothèse 2.1.3 revient à imposer comme dans [ST88] qu'un déterminant de Lopatinskii s'annule au premier ordre pour les points elliptiques.

Les hypothèses 2.1.3 et 2.1.4 correspondent à des situations où la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère à cause d'ondes de surface qui ont une décroissance exponentielle par rapport à la variable normale  $x_d$ .

Un exemple classique de problème aux limites hyperbolique satisfaisant la condition 2.1.3 est celui donnant lieu aux ondes de Rayleigh pour les équations de l'élastodynamique. Lorsque la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans la zone elliptique, on voit apparaître des ondes localisées sur le bord du domaine.

Un exemple physique de système hyperbolique qui vérifie la condition 2.1.4 est le modèle de transition de phase liquide-vapeur étudié en particulier dans [BG98] puis dans [Cou02]. Dans le sous-paragraphe 2.5.3 de ce chapitre, on donnera un autre exemple de système vérifiant la condition 2.1.4 provenant de la linéarisation des équations d'Euler dans un domaine fixé.

Dans la suite de cette étude, il sera très utile d'avoir des notations décrivant comment la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère d'un point de vue vectoriel. On définit donc :

**Définition 2.1.5** *Sous l'une des hypothèses 2.1.3, 2.1.4 on peut trouver :*

- *un vecteur  $e \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ , tel que  $E_-(\underline{\zeta}) \cap \ker B = E_-^e(\underline{\zeta}) \cap \ker B = \text{vect}(e)$ .*
- *Un vecteur  $b \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$  tel que  $b \cdot Bw = 0$ , pour tout  $w \in E_-(\underline{\zeta})$ , où  $\cdot$  désigne le produit scalaire hermitien sur  $\mathbb{C}^p$ .*

*Enfin le théorème de la base incomplète permet d'écrire :*

- $E_-(\underline{\zeta}) = \text{vect}(e) \oplus \check{E}_-(\underline{\zeta})$ . Par construction  $B$  est un isomorphisme de  $\check{E}_-(\underline{\zeta})$  sur  $b^\perp$ , au sens du produit scalaire hermitien.

**Espace des profils.**

On considère la phase

$$\varphi(t, x') = \tau t + \eta \cdot x', \quad (2.6)$$

où  $(\tau, \eta)$  est une fréquence vérifiant l'hypothèse 2.1.4.

On utilisera ici les mêmes espaces de profils que dans [Les07] dont on rappelle la définition.

**Définition 2.1.6** • On note  $P_{os}$  l'ensemble des profils oscillants i.e. l'ensemble des fonctions  $u$  de la forme :

$$u(t, x, X_d) = \sum_{m=1}^q e^{i\omega_m X_d} u_m(t, x),$$

où les  $u_m$  sont de régularité  $H^\infty(\Omega_T)$  et où les  $\omega_m$  désignent les  $q$  valeurs propres imaginaires pures de la matrice  $\mathcal{A}_1(\zeta)$ .

• On considère l'ensemble des fonctions  $U(t, x, X_d)$  de régularité  $H^{+\infty}(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$  pour lesquelles il existe de plus un réel strictement positif  $\delta$  tel que  $e^{\delta X_d} U(t, x, X_d)$  soit de régularité  $H^{+\infty}(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$ . Cet ensemble sera noté  $P_{ev}$  et désignera l'ensemble des profils évanescents.

• L'ensemble des profils noté  $P$  est défini par la relation  $P := P_{os} \oplus P_{ev}$ .

**Remarque** Dans le cas d'une fréquence  $\zeta$  vérifiant l'hypothèse 2.1.3, on a  $q = 0$  donc l'espace des profils oscillants est vide. On pose donc dans ce cas :  $P := P_{ev}$ .

## 2.2 Construction du développement BKW pour une fréquence elliptique.

Ce paragraphe donne une construction rigoureuse du développement d'optique géométrique dans le cas d'une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone elliptique. Ceci dans le but d'étudier l'influence de l'ajout d'une donnée non nulle sur les estimations d'énergie que l'on peut obtenir pour le problème aux limites (2.1) (cf. paragraphe 2.4).

Ce paragraphe peut donc être vu comme une généralisation (dans le cadre linéaire) des travaux de Marcou (voir [Mar10]) pour des problèmes aux limites à condition de bord non homogène. De plus, ce paragraphe est un bon travail préparatoire pour le paragraphe 2.3 dans lequel la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sera violée dans la zone elliptico-hyperbolique.

**Remarque** Ici, aucune confusion n'étant possible, on notera  $\Pi_\pm$  les projecteurs  $\Pi_\pm^\varepsilon$  de la définition 2.1.3.

Dans la suite de ce paragraphe, on travaillera avec des termes sources  $f^\varepsilon$  et  $g^\varepsilon$  de la forme<sup>1</sup> :

$$f^\varepsilon(t, x) := e^{i\frac{\varphi(t, x')}{\varepsilon}} f^{ev}\left(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon}\right), \text{ et } g^\varepsilon(t, x') := \varepsilon e^{i\frac{\varphi(t, x')}{\varepsilon}} g(t, x').$$

La phase  $\varphi$  est définie en (2.6), les amplitudes  $f^{ev}$  et  $g$  sont respectivement dans  $P_{ev}$  et dans  $H^\infty(\partial\Omega_T)$  et sont de plus toutes deux nulles pour les temps négatifs.

---

<sup>1</sup> On peut remarquer que le terme source à l'intérieur  $f^\varepsilon$ , est  $O(1)$  dans  $L^2(\Omega_T)$  tandis que le terme source sur le bord  $g^\varepsilon$ , est  $O(\varepsilon)$  dans  $L^2(\partial\Omega_T)$ . C'est cette différence d'amplitude qui permettra de démontrer le caractère optimal de l'estimation d'énergie.

On choisit de travailler avec un ansatz de la forme,

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi(t, x')} U_n \left( t, x, \frac{x_d}{\varepsilon} \right), \quad (2.7)$$

où pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_n \in P_{ev}$ .

L'avantage de prendre un ansatz de cette forme est de pouvoir traiter les modes elliptiques en un seul bloc comme le fait Lescarret en évitant d'avoir à imposer leur dépendance vis-à-vis de la variable rapide  $X_d$ . Ainsi, par rapport à la méthode décrite par Williams dans [Wil00] et Hernandez dans [Her12], on n'a pas besoin de supposer que la matrice  $\mathcal{A}(\underline{\zeta})$  est diagonalisable. De surcroît, cela permet d'éviter d'avoir à résoudre de manière approchée des équations de transport à coefficients complexes.

Injectant l'ansatz (2.7) dans le problème aux limites (2.1) on obtient la cascade d'équations :

$$\begin{cases} L(\partial_{X_d})U_0 = 0, \\ L(\partial_{X_d})U_n + L(\partial)U_{n-1} = \delta_{n,1}f, \quad \forall n \geq 1, \\ BU_{n|_{x_d=X_d=0}} = \delta_{n,1}g, \quad \forall n \geq 0, \\ U_{n|_{t \leq 0}} = 0, \quad \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\delta_{n,p}$  désigne le symbole de Kronecker et où on a posé :

$$L(\partial_{X_d}) := A_d (\partial_{X_d} - \mathcal{A}(\underline{\zeta})).$$

Le lemme suivant est un point crucial pour résoudre les équations d'évolution vérifiées par les modes évanescents, ou en d'autres termes, pour résoudre la cascade d'équations (2.8).

**Lemme 2.2.1** *On pose :*

$$\mathbb{P}_{ev} U := e^{X_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_- U(0), \quad (2.9)$$

$$\mathbb{Q}_{ev} F := \int_0^{X_d} e^{(X_d-s) \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_- A_d^{-1} F(s) ds - \int_{X_d}^{+\infty} e^{(X_d-s) \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+ A_d^{-1} F(s) ds. \quad (2.10)$$

Alors, pour tout  $F \in P_{ev}$  l'équation

$$L(\partial_{X_d})U = F,$$

admet une solution  $U \in P_{ev}$  s'écrivant sous la forme :

$$U = \mathbb{P}_{ev} U + \mathbb{Q}_{ev} F.$$

**Démonstration :** On doit résoudre :

$$\partial_{X_d} U(t, x, X_d) = \mathcal{A}(\underline{\zeta}) U(t, x, X_d) + A_d^{-1} F(t, x, X_d),$$

équation différentielle ordinaire en  $X_d$ . En effet les variables  $t$  et  $x$  jouent le rôle de paramètre, c'est pourquoi on omettra de les noter dans la suite de cette démonstration.

Pour tout terme source  $F$ , la formule de Duhamel donne une solution qui s'écrit sous la forme

$$U(X_d) = e^{X_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_- U(0) + \int_0^{X_d} e^{(X_d-s) \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_- A_d^{-1} F(s) ds - \int_{X_d}^{\infty} e^{(X_d-s) \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+ A_d^{-1} F(s) ds. \quad (2.11)$$

Par définition des opérateurs  $\mathbb{P}_{ev}$  et  $\mathbb{Q}_{ev}$ , cette solution s'écrit sous la forme  $U = \mathbb{P}_{ev} U + \mathbb{Q}_{ev} F$  et on vérifie sur la formule (2.11) que  $U \in P_{ev}$ .

□

Grâce au lemme 2.2.1, la cascade d'équation (2.8) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{ev}U_0 = U_0, \\ BU_{0|_{x_d=X_d=0}} = 0, \\ U_{0|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

pour le terme principal  $U_0$ , et

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} (I - \mathbb{P}_{ev})U_n = \mathbb{Q}_{ev}(\delta_{n,1}f^{ev} - L(\partial)U_{n-1}), \\ BU_{n|_{x_d=X_d=0}} = \delta_{n,1}g, \\ U_{n|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

pour les termes d'ordre supérieur.

### 2.2.1 Construction du terme principal.

Utilisant le fait que  $\mathbb{P}_{ev}U_0 = U_0$  dans la condition au bord de (2.12), on doit résoudre pour le terme principal le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{ev}U_0 = U_0, \\ B\Pi_-U_0(t, x', 0, 0) = 0, \\ U_{0|_{t \leq 0}} = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Par définition de  $\mathbb{P}_{ev}$  (cf. (2.9)), la première équation de la cascade (2.14) implique que le terme principal  $U_0$  est connu si on connaît sa trace en  $\{X_d = 0\}$ . Le problème est que cette trace est déterminée par la condition de bord qui est l'équation "difficile" à résoudre de ce système. En effet, on ne peut pas inverser la matrice  $B$  sur  $E_-(\zeta)$ , car la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est pas vérifiée. De plus, la condition de bord ne détermine pas la trace en  $\{X_d = 0\}$  mais "la double trace" en  $\{X_d = x_d = 0\}$ .

On va donc commencer par déterminer cette "double trace"  $U_0(t, x', 0, 0)$ . Pour ce faire, on pose

$$\Pi_-U_0(t, x', 0, 0) = \alpha_0(t, x')e, \quad (2.15)$$

où  $e$  est le vecteur défini en 2.1.5,  $\alpha_0$  étant une fonction scalaire.

La détermination de  $\alpha_0$  suit la méthode développée par Marcou que l'on adapte ici au cas d'une condition au bord non homogène. On commence par s'intéresser aux équations (2.13) pour le terme  $U_1$ . Elles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P}_{ev})U_1 = \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0), \\ BU_{1|_{x_d=X_d=0}} = g, \\ U_{1|_{t \leq 0}} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Injectant la première équation évaluée en  $\{x_d = X_d = 0\}$  dans la condition de bord et prenant le produit scalaire avec le vecteur  $b$  défini en 2.1.5 ; on se ramène à l'équation :

$$b \cdot B\mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0)|_{x_d=X_d=0} = b \cdot g. \quad (2.17)$$

Cependant utilisant la définition de  $\mathbb{Q}_{ev}$  (voir (2.10)), on peut développer le terme de gauche sous la forme :

$$b \cdot B\mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0)|_{x_d=X_d=0} = b \cdot B \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}(\zeta)} \Pi_+ A_d^{-1}(-f^{ev} + L(\partial)U_0(s)) ds,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} b \cdot B \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+ A_d^{-1} L(\partial) U_0(s) ds &= b \cdot \left( g + B \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+ A_d^{-1} f^{ev}(s) ds \right), \\ &:= \tilde{g}_0. \end{aligned}$$

Développant le terme de gauche et utilisant l'égalité (2.15), il vient :

$$b \cdot B \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+ A_d^{-1} L(\partial) U_0(s) ds = b \cdot B I_t \partial_t \alpha_0 + \sum_{j=1}^{d-1} b \cdot B I_j \partial_j \alpha_0,$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} I_t := \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+ A_d^{-1} e^{s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} e ds, \\ I_j := \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+ A_d^{-1} A_j e^{s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} e ds. \end{cases} \quad (2.18)$$

On a donc montré que la fonction  $\alpha_0$  vérifie l'équation de transport :

$$\left( b \cdot B I_t \partial_t + \sum_{j=1}^{d-1} b \cdot B I_j \partial_j \right) \alpha_0 = \tilde{g}_0.$$

Cependant les coefficients de cette équation n'ont a priori aucune raison d'être réels. Le caractère bien posé de cette équation de transport n'est donc pas immédiat. Dans la suite de ce sous-paragraphe, on va tâcher de rendre les coefficients  $I_t, I_j$  plus explicites.

**Lemme 2.2.2** [Mar10] *On pose  $I_t := I_0$  et  $\partial_{\eta_0} := \partial_\tau$ . Alors pour tout  $j \in \{0, \dots, d-1\}$ ,*

$$I_j = \Pi_+ \partial_{\eta_j} \Pi_- (\underline{\zeta}) e.$$

**Démonstration :** Soit  $\mu$  une valeur propre de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta}) \Pi_-$ . Par définition on a  $\operatorname{Re} \mu < 0$  et de plus,  $e^{s\mu}$  est une valeur propre de  $e^{s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_-$  ; la formule de Dunford permet donc d'écrire :

$$e^{s\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_- = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} e^{sz} (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - z)^{-1} dz,$$

où  $\Gamma_-$  est une courbe simple fermée incluse dans le demi-plan complexe de partie réelle négative entourant les valeurs propres de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta}) \Pi_-$ .

Puisque  $\Pi_- e = e$ , on peut réécrire,

$$I_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} \left( \int_0^{+\infty} e^{s(z-\mathcal{A}(\underline{\zeta}))} \Pi_+ ds \right) A_d^{-1} A_j (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - z)^{-1} dz e.$$

D'autre part on peut calculer explicitement,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{s(z-\mathcal{A}(\underline{\zeta}))} \Pi_+ ds &= \left[ e^{s(z-\mathcal{A}(\underline{\zeta}))} \Pi_+ (z - \mathcal{A}(\underline{\zeta}))^{-1} \right]_{s=0}^{s=+\infty}, \\ &= \Pi_+ (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - z)^{-1}, \end{aligned}$$

car les valeurs propres de  $\mathcal{A}(\underline{\zeta}) \Pi_+$  ont une partie réelle strictement positive et que la partie réelle de  $z \in \Gamma_-$  est strictement négative, donc le terme en l'infini est nul.

Avec la convention  $A_0 = I$  on trouve,

$$\begin{aligned} I_j &= \Pi_+ \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - z)^{-1} A_d^{-1} A_j (\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - z)^{-1} dz \right) e, \\ &= \Pi_+ \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} \partial_{\eta_j} ((\mathcal{A}(\underline{\zeta}) - z)^{-1}) dz \right) e, \\ &= \Pi_+ \partial_{\eta_j} \Pi_- (\underline{\zeta}) e. \end{aligned}$$



□

Si on pose  $E_1(\zeta) = e(\zeta)$  dans l'hypothèse 2.1.3, au voisinage de  $\underline{\zeta}$  on peut écrire l'égalité suivante :

$$Be(\zeta) = \beta(\zeta) (\gamma + i\theta(\zeta)), \quad (2.19)$$

où  $\beta(\zeta)$  et  $e(\zeta)$  sont des vecteurs réguliers de taille  $p$  et  $\theta$  une fonction scalaire qui vérifient :

$$\begin{cases} e(\underline{\zeta}) = e, \\ \theta(\underline{\zeta}) = 0 ; \theta(\zeta) \in \mathbb{R}, \\ \beta(\underline{\zeta}) \neq 0. \end{cases}$$

Plus précisément,  $\beta(\zeta)$  est la première colonne de la matrice  $P(\zeta)$  introduite dans l'hypothèse 2.1.3. En utilisant le lemme 2.2.2, au voisinage de  $\underline{\zeta}$  on peut écrire l'égalité :

$$b \cdot BI_j = b \cdot B\Pi_+(\underline{\zeta})\partial_{\eta_j}\Pi_-(\underline{\zeta})e.$$

On dérive l'identité  $\Pi_-(\zeta)e(\zeta) = e(\zeta)$  pour  $\zeta$  voisin de  $\underline{\zeta}$ , puis on compose à gauche par  $\Pi_+(\underline{\zeta})$  afin d'annuler le deuxième terme, et l'on obtient :

$$\Pi_+(\underline{\zeta})\partial_{\eta_j}\Pi_-(\underline{\zeta})e = \partial_{\eta_j}e(\underline{\zeta}).$$

Maintenant dérivant (2.19) et évaluant en  $\underline{\zeta}$  on a :

$$B\partial_{\eta_j}e(\underline{\zeta}) = i\beta(\underline{\zeta})\partial_{\eta_j}\theta(\underline{\zeta}).$$

On a donc montré la proposition suivante :

**Proposition 2.2.1** *La fonction  $\alpha_0$  définie en (2.15) est solution de l'équation de transport à coefficients réels :*

$$\begin{cases} ib \cdot \beta(\underline{\zeta}) (\partial_\tau \theta(\underline{\zeta}) \partial_t \alpha_0 + \nabla_\eta \theta(\underline{\zeta}) \cdot \nabla_x \alpha_0) = \tilde{g}_0, \\ \alpha_0|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

où les coefficients  $\partial_\tau \theta(\underline{\zeta})$  et  $b \cdot \beta(\underline{\zeta})$  sont non nuls (cf. [Mar10]). Donc  $\alpha_0$  est déterminée de façon unique, est non nulle si  $\tilde{g}_0$  l'est et admet la même régularité que  $\tilde{g}_0$  (i.e. une régularité  $H^\infty(\partial\Omega_T)$ ). D'après l'équation (2.15), il en est de même pour  $\Pi_-U_0(t, x', 0, 0)$ .

**Remarque** On insiste sur le fait que le coefficient  $b \cdot \beta$  en facteur dans l'équation de transport 2.20 n'est pas nul. Raisonnnons en effet par l'absurde, d'après la définition 2.1.5 si  $b \cdot \beta$  est nul alors il existe un vecteur  $v \in \check{E}_-(\underline{\zeta})$  tel que :

$$\beta(\underline{\zeta}) = Bv. \quad (2.21)$$

Décomposant  $v$  sur les vecteurs de la base de  $E_-(\underline{\zeta})$  donnée dans l'hypothèse 2.1.3, on peut écrire  $v = \sum_{j=2}^p \alpha_j E_j(\underline{\zeta})$ . Injectant cette expression dans (2.21) il vient :

$$\beta(\underline{\zeta}) = \sum_{j=2}^p \alpha_j \beta_j(\underline{\zeta}),$$

où  $\beta_j(\underline{\zeta})$  désigne la  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $P(\underline{\zeta})$  ce qui contredit clairement l'inversibilité de  $P(\underline{\zeta})$ .

La proposition 2.2.1 permet donc de déterminer de façon unique la "double trace"  $\Pi_- U_0(t, x', 0, 0)$ . Pour conclure la construction de  $U_0$  il suffit de remarquer que dans la condition de polarisation  $U_0(t, x, X_d) = \mathbb{P}_{ev} U_0(t, x, X_d)$ , qui régit l'évolution du terme principal  $U_0$ , la variable  $x_d$  n'est qu'un paramètre. Par conséquent on peut relever la "double trace"  $\Pi_- U_0(t, x', 0, 0)$  en une "trace simple"  $\Pi_- U_0(t, x, 0)$  de façon arbitraire (toutefois de façon compatible pour  $x_d$  nul). On pose donc comme dans [Les07] :

$$U_0(t, x, X_d) := \alpha_0(t, x') \chi(x_d) e^{X_d A(\underline{\zeta})} e,$$

où  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  vérifie  $\chi(0) = 1$ .

Ceci conclut la détermination du terme d'ordre zéro dans le développement BKW.<sup>2</sup>

**Remarque** On insiste sur le fait que le terme principal du développement BKW, et par voie de conséquence tout le développement BKW, n'est pas unique. En effet, le terme principal  $U_0$  dépend de la fonction de relèvement  $\chi$ . Cependant un argument de Métivier [Mét04] montre que cette dépendance ne se fait qu'au travers d'un terme d'erreur d'ordre supérieur en  $\varepsilon$ . En effet, par développement de Taylor en  $x_d$  on peut écrire :

$$U_0(t, x, X_d) = U_0(t, x', 0, X_d) + x_d V(t, x, X_d),$$

où  $V$  est une fonction de  $P_{ev}$ , ainsi que  $W := X_d V$ . On peut donc réécrire en posant  $X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}$  :

$$U_0(t, x, X_d) = U_0\left(t, x', 0, \frac{x_d}{\varepsilon}\right) + \varepsilon W\left(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon}\right).$$

Donc l'erreur entre la trace de  $U_0$  en  $\{x_d = 0\}$  et son relèvement est au pire un terme d'erreur d'ordre un.

### 2.2.2 Construction du second terme.

La construction du second terme du développement BKW est assez similaire à celle du premier ; on se contente donc d'en décrire les grandes lignes. Le second terme du développement doit satisfaire la cascade d'équations (2.16) c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P}_{ev})U_1 = \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0), \\ BU_{1|_{x_d=X_d=0}} = g, \\ U_{1|_{t \leq 0}} = 0. \end{cases}$$

Cependant, l'amplitude  $U_0$  étant maintenant connue la première équation de (2.16) permet de déterminer la partie non polarisée de  $U_1$ , c'est-à-dire  $(I - \mathbb{P}_{ev})U_1$ .

Ainsi, pour déterminer  $U_1$ , il faut et il suffit de déterminer sa partie polarisée, c'est-à-dire  $\mathbb{P}_{ev}U_1$ . On a vu dans la construction du premier terme que pour ce faire il suffisait de connaître la trace  $\Pi_- U_1(t, x, 0)$ . Comme pour la construction du premier terme on va d'abord déterminer la "double trace"  $\Pi_- U_1(t, x', 0, 0)$ .

Injectant dans la condition de bord de (2.16) on obtient :

$$B\Pi_- U_1(t, x', 0, 0) = g - B\mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0)|_{x_d=X_d=0}. \quad (2.22)$$

---

<sup>2</sup>Bien que l'on ne sache pas encore à ce stade de l'analyse si le terme principal que l'on vient de construire approche bien la solution exacte du problème aux limites, il est intéressant de remarquer qu'un terme source sur le bord d'ordre un en  $\varepsilon$  suffit à "allumer" un terme d'ordre zéro en  $\varepsilon$  dans le développement BKW. Cette différence d'échelle sera au coeur de la démonstration de l'optimalité de l'estimation d'énergie.

On assiste ici à une légère différence par rapport au premier terme. En effet, a priori le membre de droite de cette équation n'est pas nul donc on ne peut pas en déduire que  $\Pi_- U_1(t, x', 0, 0) \in \ker B \cap E_- (\underline{\zeta})$ .

On décompose donc

$$\Pi_- U_1(t, x', 0, 0) = \alpha_1(t, x')e + v_1(t, x'), \quad (2.23)$$

où  $\alpha_1$  est une fonction scalaire à déterminer et  $v_1(t, x') \in \check{E}_- (\underline{\zeta})$ , où le sous-espace vectoriel  $\check{E}_- (\underline{\zeta})$  est défini en 2.1.5.

La condition de bord (2.22) se réécrit donc sous la forme :

$$v_1 = B_{|\check{E}_- (\underline{\zeta})}^{-1} (g - B\mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0)|_{x_d=X_d=0}),$$

équation qui détermine en façon unique  $v_1 \in H^\infty(\partial\Omega_T)$ , nul pour les temps négatifs.

A ce stade, il suffit donc de déterminer  $\alpha_1$  pour connaître la double trace  $\Pi_- U_1(t, x', 0, 0)$ . Pour cela on peut réitérer à quelques différences près la même construction que celle décrite dans le sous-paragraphe 2.2.1 qui permet d'exhiber une équation de transport dont  $\alpha_1$  est solution.

Les équations satisfaites par le troisième terme s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P}_{ev})U_2 = -\mathbb{Q}_{ev}L(\partial)U_1, \\ BU_{2|_{x_d=X_d=0}} = 0, \\ U_{2|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases}$$

qui après l'injection de la première équation évaluée en  $x_d = X_d = 0$  dans la condition de bord et composition à gauche par le vecteur  $b$ , conduisent à la condition :

$$b \cdot B\mathbb{Q}_{ev}L(\partial)\Pi_- U_{1|_{x_d=X_d=0}} = -b \cdot B\mathbb{Q}_{ev}L(\partial)(I - \Pi_-)U_{1|_{x_d=X_d=0}}.$$

Utilisant la décomposition (2.23) on se ramène à l'équation :

$$\begin{aligned} b \cdot B\mathbb{Q}_{ev}L(\partial)\alpha_1 e &= -b \cdot B\mathbb{Q}_{ev}L(\partial) \left( (I - \Pi_-)U_{1|_{x_d=X_d=0}} + v_1 \right), \\ &:= \tilde{g}_1(t, x'). \end{aligned}$$

Mais comme dans la construction du premier terme, le terme de gauche de l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$b \cdot B\mathbb{Q}_{ev}L(\partial)\alpha_1 e = b \cdot B \left( I_0 \partial_t + \sum_{j=1}^{d-1} I_j \partial_j \right) \alpha_1,$$

où les  $I_j$  pour  $j$  dans  $\{0, \dots, d-1\}$  sont définis par (2.18). Le lemme 2.2.2 permet alors de montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.2.2** *La fonction  $\alpha_1$  définie en (2.23) est solution de l'équation de transport :*

$$\begin{cases} ib \cdot \beta(\underline{\zeta}) (\partial_\tau \theta(\underline{\zeta}) \partial_t \alpha_1 + \nabla_\eta \theta(\underline{\zeta}) \cdot \nabla_x \alpha_1) = \tilde{g}_1, \\ \alpha_{1|_{t \leq 0}} = 0. \end{cases}$$

Mimant la fin du sous-paragraphe 2.2.1, il faut maintenant étendre  $\Pi_- U_1(t, x', 0, 0)$  aux  $x_d$  positifs. On pose par exemple :

$$U_1(t, x, X_d) = \chi(x_d) e^{X_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} (\alpha_1(t, x')e + v_1(t, x')) + \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0)(t, x_d, X_d),$$

où l'on rappelle que la fonction  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  est telle que  $\chi(0) = 1$ .

Ceci conclut la construction de la seconde amplitude du développement BKW.

### 2.2.3 Construction des termes d'ordre supérieur.

Il est clair que la méthode développée dans les deux sous-paragraphe précédents permet aussi de déterminer le terme d'ordre  $n + 1$  si on connaît les  $n$  termes précédents. En guise de conclusion et de récapitulatif on l'expose cependant une dernière fois.

◇ Connaissant le  $n^{ième}$  terme, l'équation (2.13) détermine la partie non polarisée du terme d'ordre  $n + 1$ .

◇ La définition de  $\mathbb{P}_{ev}$  implique que pour connaître la partie polarisée du terme d'ordre  $n + 1$ , il suffit de connaître la trace  $\Pi_- U_{n+1}(t, x, 0)$ . On commence par déterminer "la double trace"  $\Pi_- U_{n+1}(t, x', 0, 0)$ .

◇ On décompose  $\Pi_- U_{n+1}(t, x', 0, 0)$  en une composante dans  $ker B$  dépendant d'une fonction scalaire  $\alpha_{n+1}$  et une composante sur  $\check{E}_-(\zeta)$  qui est déterminée par la condition de bord.

◇ Pour déterminer  $\alpha_{n+1}$  on écrit les équations satisfaites par le terme d'ordre  $n + 2$  et la méthode de Marcou permet de montrer que  $\alpha_{n+1}$  est solution d'une équation de transport que l'on résout par la méthode des caractéristiques. Ainsi, la "double trace"  $\Pi_- U_{n+1}(t, x', 0, 0)$  est connue.

◇ On conclut alors en relevant la "double trace"  $\Pi_- U_{n+1}(t, x', 0, 0)$  en une "trace simple"  $\Pi_- U_{n+1}(t, x, 0)$ , par exemple en multipliant par une fonction de  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  valant 1 en 0.

On a donc démontré la proposition suivante :

**Proposition 2.2.3** *Il existe une suite de fonctions  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P_{ev}$  qui vérifie la cascade d'équations (2.8).*

### 2.2.4 Justification du développement.

Le but de ce sous-paragraphe est de montrer que le développement BKW que l'on vient de construire converge bien, dans un sens à déterminer, vers la solution exacte  $u^\varepsilon$  du problème aux limites (2.1).

On commence par rappeler le théorème suivant qui justifie l'existence de la solution  $u^\varepsilon$  :

**Théorème 2.2.1** [ST88] *Sous les hypothèses 2.1.1-2.1.2-2.1.3, pour toute fonction  $f \in L^2(\Omega_T)$ ,  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)$ , nulles pour les temps négatifs, il existe une unique solution  $u \in L^2(\Omega_T)$ , à trace dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)$ , du problème aux limites (2.1) qui vérifie de plus l'estimation d'énergie :*

$$\|u\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{H_\gamma^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \leq \frac{C}{\gamma^2} \left( \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{H_\gamma^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \right), \quad (2.24)$$

pour  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$  et où la constante  $C$  est indépendante de  $\gamma$  et de  $T$ .

De plus<sup>3</sup>, pour  $s > 0$ , si  $f \in H^s(\Omega_T)$  et  $g \in H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)$  alors il existe une unique solution  $u \in H^s(\Omega_T)$ , à trace dans  $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)$ , du problème aux limites (2.1) qui vérifie de plus l'estimation d'énergie :

$$\|u\|_{H_\gamma^s(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{H_\gamma^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \leq \frac{C}{\gamma^2} \left( \|f\|_{H_\gamma^s(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{H_\gamma^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \right).$$

Dans tout ce qui suit puisque l'estimation d'énergie (2.24) est vraie pour  $\gamma$  au dessus du seuil  $\gamma_0$ , on peut faire disparaître la dépendance en  $\gamma$  en multipliant la constante  $C$  par  $e^{\gamma_0 T}$ . On réécrit donc l'estimation d'énergie (2.24) sous la forme :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \right). \quad (2.25)$$

<sup>3</sup>Il n'y a pas de démonstration à proprement parler de ce résultat dans la littérature. Cependant, la démonstration de [MS11], dans le cas de la classe  $WR$  (cf. [BGRSZ02]) se généralise au cas présent.

On va chercher à montrer la convergence du développement BKW tronqué vers la solution exacte dans les espaces  $H_\varepsilon^s(\Omega_T)$  qui constituent un cadre naturel puisque ces espaces permettent de compenser la perte de puissance de  $\varepsilon$  lors la dérivation de la partie oscillante des solutions. Ces espaces sont définis de la façon suivante :

**Définition 2.2.1** *Pour tout réel  $N$  et toute suite de fonctions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]}$  de  $H^\infty(\Omega_T)$ , on dit que la suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]}$  est  $O(\varepsilon^N)$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$  si pour tout multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$  il existe une constante  $C_\alpha > 0$  telle que :*

$$\forall \varepsilon \in ]0, 1], \varepsilon^{|\alpha|} \|\partial^\alpha u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C_\alpha \varepsilon^N.$$

Avant d'énoncer le théorème justifiant le développement BKW, on donne une propriété qui montre l'intégrabilité des fonctions  $U$  et  $L(\partial)U$  pour  $U$  dans  $P_{ev}$  qui décrit précisément leur comportement pour  $\varepsilon$  petit en tant qu'éléments de  $L^2(\Omega_T)$ .

On verra dans les démonstrations des théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 qu'il est nécessaire pour établir l'optimalité des pertes de dérivées dans les estimations d'énergie que la vitesse de convergence du développement BKW tronqué vers la solution exacte soit suffisamment rapide. Ainsi, comme on le verra dans la preuve du théorème 2.2.2, la proposition 2.2.4 ci-dessous permet de raffiner la vitesse de convergence. Bien que ce raffinement ne soit pas indispensable dans le cas elliptique, il jouera un rôle clé dans le cas elliptico-hyperbolique.

**Proposition 2.2.4** *Soit  $U \in P_{ev}$  ; alors les fonctions  $U(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon})$  et  $(L(\partial)U(t, x, X_d))|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}$  sont  $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .*

**Démonstration :** On calcule

$$\begin{aligned} \|U|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 &= \int_0^{+\infty} \int_{]-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}} \left| e^{\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} U\left(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon}\right) e^{-\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} \right|^2 dt dx' dx_d, \\ &= \int_0^{+\infty} \left\| e^{\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} U\left(\cdot, \cdot, x_d, \frac{x_d}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\partial\Omega_T)}^2 e^{-2\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} dx_d. \end{aligned}$$

Par hypothèse  $e^{\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} U(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon}) \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$  on peut donc majorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|U|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 &\leq \left\| U e^{\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} \right\|_{L_{x_d, X_d}(L_{t, x'}^2(\partial\Omega_T))}^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} dx_d, \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration de la première assertion.

Soit  $\partial_y$  un opérateur différentiel,  $y$  étant un élément de  $\{t, x_1, \dots, x_d\}$  on a :

$$\|(\partial_y U(\cdot, \cdot, X_d))|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 = \int_0^{+\infty} \left\| e^{\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} \partial_y U\left(\cdot, \cdot, x_d, \frac{x_d}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\partial\Omega_T)}^2 e^{-2\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} dx_d,$$

car l'évaluation de  $X_d$  en  $\frac{x_d}{\varepsilon}$  est effectuée après la dérivation.

Puisque  $e^{\delta \frac{x_d}{\varepsilon}} \partial_y U(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon}) \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$  on peut appliquer la même majoration que pour la première assertion et donc on obtient :

$$\|(\partial_y U(\cdot, \cdot, X_d))|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

et par inégalité triangulaire on en déduit que  $(L(\partial)U(t, x, X_d))|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}$  est  $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

□

On définit enfin

$$u_{app,N_0}^\varepsilon(t, x) := \sum_{n \leq N_0} \varepsilon^n e^{i \frac{\varphi}{\varepsilon}} U_n \left( t, x, \frac{x_d}{\varepsilon} \right),$$

le développement BKW tronqué à l'ordre  $N_0$ . Le résultat de convergence est alors le suivant :

**Théorème 2.2.2** *Sous les hypothèses 2.1.1-2.1.2 et 2.1.3, l'écart  $u_{app,N_0}^\varepsilon - u^\varepsilon$ , où  $u^\varepsilon$  est la solution du problème aux limites (2.1), est  $O\left(\varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}\right)$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$ . Donc, le développement BKW tronqué converge bien vers la solution exacte dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$ .*

**Démonstration :** Par construction des amplitudes  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , l'écart  $u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon$  est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} L(\partial) \left( u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon \right) = \varepsilon^{N_0+1} e^{i \frac{\varphi}{\varepsilon}} (L(\partial) U_{N_0+1})|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}, \\ B \left( u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon \right)|_{x_d=0} = 0, \\ \left( u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon \right)|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Appliquant l'estimation d'énergie (2.25), on peut majorer  $\|u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)}$  par la norme  $L^2(\Omega_T)$  du terme source de (2.26). Plus précisément :

$$\|u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{N_0+1} \| (L(\partial) U_{N_0+1})|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}} \|_{L^2(\Omega_T)}.$$

Or d'après la proposition 2.2.4, pour tout indice  $N$ ,  $(L(\partial) U_N)|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ , donc on déduit :

$$\|u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}.$$

Pour tout multi-indice  $\alpha$  les dérivées tangentielles  $\partial_{t,x'}^\alpha$  sont estimées directement en dérivant le système (2.1), on a donc :

$$\left\| \partial_{t,x'}^\alpha (u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \varepsilon^{N_0+1} \left\| \partial_{t,x'}^\alpha \left( e^{i \frac{\varphi}{\varepsilon}} L(\partial) U_{N_0+1} \right)|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}} \right\|_{L^2(\Omega_T)}.$$

Calculant le terme de droite par la formule de Leibniz il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{t,x'}^\alpha \left( e^{i \frac{\varphi}{\varepsilon}} L(\partial) U_{N_0+1} \right) \right\|_{L^2(\Omega_T)} &\leq \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \| (L(\partial) U_{N_0+1})|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}} \|_{L^2(\Omega_T)} \\ &+ \| \partial_{t,x'}^\alpha (L(\partial) U_{N_0+1})|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}} \|_{L^2(\mathbb{R}_{x_d}^+; H_{t,x'}^{|\alpha|}(\partial\Omega_T))}, \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^{|\alpha|}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\varepsilon^{|\alpha|} \left\| \partial_{t,x'}^\alpha (u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}. \quad (2.27)$$

On utilise ensuite l'équation d'évolution du problème aux limites (2.26) pour exprimer les dérivées par rapport à la variable  $x_d$  comme sommes de dérivées par rapport aux variables tangentielles. Ainsi l'estimation (2.27) reste vraie si on adjoint les dérivations par rapport à la variable normale  $x_d$ . On a donc démontré que  $u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon$  est  $O\left(\varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}\right)$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$ .

Or,  $u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u_{app,N_0}^\varepsilon$  est clairement  $O\left(\varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}\right)$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$  donc l'inégalité triangulaire permet de conclure la démonstration.

□

### 2.3 Construction du développement BKW pour une fréquence elliptico-hyperbolique.

Le but de ce paragraphe est de construire un développement d'optique géométrique pour une fréquence vérifiant l'hypothèse 2.1.4 et non plus l'hypothèse 2.1.3 comme dans le paragraphe précédent.

Le fait que la fréquence soit maintenant elliptico-hyperbolique nécessitera de prendre en compte des profils oscillants qui comme on le verra compliqueront légèrement la résolution des conditions au bord.

On considère des termes sources  $f^\varepsilon$  et  $g^\varepsilon$  de la forme,

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(t, x) &:= e^{i\frac{\varphi(t, x')}{\varepsilon}} (\varepsilon f^{os}(t, x, X_d) + f^{ev}(t, x, X_d))|_{X_d = \frac{x_d}{\varepsilon}}, \\ g^\varepsilon(t, x') &:= \varepsilon e^{i\frac{\varphi(t, x')}{\varepsilon}} g(t, x'), \end{aligned}$$

avec  $f^{os} := \sum_{m=1}^q e^{i\omega_m X_d} f_m^{os} \in P_{os}$ ,  $f^{ev} \in P_{ev}$  et  $g \in H^{+\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$ , des fonctions nulles pour les temps négatifs.

**Remarque** L'analyse suivante reste vraie en prenant pour  $f^\varepsilon$  un élément de la forme  $e^{i\frac{\varphi}{\varepsilon}} f$  avec  $f \in P$ . Cependant comme on le verra, un terme source de la forme précédente qui permet de considérer des amplitudes dont la composante évanescence est plus importante que la composante oscillante sera nécessaire lors de la démonstration du théorème 2.4.2.

On postule un ansatz de la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n e^{i\frac{\varphi(t, x')}{\varepsilon}} U_n \left( t, x, \frac{x_d}{\varepsilon} \right), \quad (2.28)$$

où pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $U_n \in P$  se décompose de la façon suivante :

$$U_n(t, x, X_d) := U_n^{os} + U_n^{ev} = \sum_{m=1}^M e^{i\omega_m X_d} u_{n,m} + U_n^{ev}.$$

Injectant l'ansatz (2.28) dans le problème aux limites (2.1) on obtient les cascades d'équations :

$$\begin{cases} L(\partial_{X_d})U_0 = 0, \\ BU_{0|_{x_d=X_d=0}} = 0, \\ U_{0|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

pour le terme principal et :

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} L(\partial_{X_d})U_n + L(\partial)U_{n-1} = \delta_{n,1}f^{ev} + \delta_{n,2}f^{os}, \\ BU_{n|_{x_d=X_d=0}} = \delta_{n,1}g, \\ U_{n|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (2.30)$$

pour les termes suivants.  $\delta_{n,p}$  désigne une fois de plus le symbole de Kronecker.

Le lemme suivant, qui généralise le lemme 2.2.1, donne une solution de l'équation  $L(\partial_{X_d})U = F$  pour  $F \in P$ .

**Lemme 2.3.1** [Les07] *Il existe des projecteurs  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{P}^i$ , un pseudo-inverse  $\mathbb{Q}$  tels que pour tout profil  $F \in P$  l'équation :*

$$L(\partial_{X_d})U = F, \quad (2.31)$$

*admet une solution  $U \in P$  si la condition de compatibilité  $\mathbb{P}^i F = 0$  est vérifiée. Auquel cas, cette solution  $U$  est donnée par la formule :*

$$U = \mathbb{Q}F + \mathbb{P}U.$$

On rappelle la démonstration de ce résultat (voir [Les07]).

**Démonstration :** Puisque,  $P$  est la somme directe de  $P_{os}$  et de  $P_{ev}$  il suffit de construire les projecteurs  $\mathbb{P}_{ev}$  et  $\mathbb{P}_{os}$  séparément dans ces deux espaces puis de définir  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{ev} + \mathbb{P}_{os}$ . On fait ensuite de même pour  $\mathbb{Q}$ .

De surcroît dans tout ce qui suit seule la dépendance en la variable rapide  $X_d$  importe. Ainsi, les variables lentes  $t$  et  $x$  jouent le rôle de paramètres et l'on omettra de les noter dans un souci de simplification des notations.

• **Cas**  $F \in P_{ev}$ .

On est donc dans le cas de la preuve du lemme 2.2.1 pour lequel le projecteur  $\mathbb{P}_{ev}$  et le pseudo-inverse  $\mathbb{Q}_{ev}$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ev}U &:= e^{X_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_-^e U(0), \\ \mathbb{Q}_{ev}F_{ev} &:= \int_0^{X_d} e^{(X_d-s)\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_-^e A_d^{-1} F_{ev}(s) ds - \int_{X_d}^{+\infty} e^{(X_d-s)\mathcal{A}(\underline{\zeta})} \Pi_+^e A_d^{-1} F_{ev}(s) ds, \end{aligned}$$

et la solution associée  $U_{ev}$  est bien de la forme  $U = \mathbb{P}_{ev}U + \mathbb{Q}_{ev}F$  pour tout terme source  $F \in P_{ev}$ . Aucune condition de résolubilité n'est à imposer sur  $F$  et on peut donc poser

$$\mathbb{P}_{ev}^i = 0.$$

Ce qui conclut la démonstration dans le cas d'un terme source évanescent.

• **Cas**  $F \in P_{os}$ .

On décompose  $F = \sum_{m=1}^q e^{i\omega_m X_d} F_m$ . Cette fois l'équation (2.31) s'écrit à  $m$  fixé sous la forme :

$$\mathcal{L}(\underline{\zeta}, i\omega_m)U_m = F_m, \quad (2.32)$$

où

$$\mathcal{L}(\underline{\zeta}, i\omega_m) := i \left( \tau + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j + \omega_m A_d \right).$$

Utilisant les projecteurs  $\Pi_m$  et les pseudo-inverses  $R_m$  introduits dans la définition 2.1.3 on peut poser pour tout  $U \in P_{os}$  :

$$\mathbb{P}_{os}U = \mathbb{P}_{os}^i U := \sum_{m=1}^q e^{iX_d \omega_m} \Pi_m U_m, \quad \mathbb{Q}_{os}F_{os} := \sum_{m=1}^q e^{iX_d \omega_m} R_m F_m.$$

Alors l'équation (2.32) peut se reformuler en terme de projections de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{os}^i \sum_{m=1}^q \mathcal{L}(\underline{\zeta}, i\omega_m)U_m = \mathbb{P}_{os}^i F_{os}, \\ \mathbb{Q}_{os} \sum_{m=1}^q \mathcal{L}(\underline{\zeta}, i\omega_m)U_m = \mathbb{Q}_{os} \mathbb{P}_{os}^i F_{os}, \end{cases}$$

ce qui est équivalent par définition des  $\Pi_m$  et des  $R_m$  à

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{os}^i F_{os} = 0, \\ U = \mathbb{Q}_{os} F_{os} + \mathbb{P}_{os} U. \end{cases}$$

La première équation donne donc bien une condition de compatibilité et la seconde décrit la forme de la solution. Ce qui conclut la démonstration dans le cas oscillant et donc dans le cas général.



□

Les cascades d'équations (2.29) et (2.30) peuvent, en vertu du lemme 2.3.1, se réécrire en terme de projecteurs de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{P}U_0 = U_0, \\ \mathbb{P}^i L(\partial)\mathbb{P}U_0 = 0, \\ BU_{0|_{x_d=x_d=0}} = 0, \\ U_{0|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

pour le terme principal  $U_0$  et

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} (I - \mathbb{P})U_n = \mathbb{Q}(\delta_{n,2}f^{os} + \delta_{n,1}f^{ev} - L(\partial)U_{n-1}), \\ \mathbb{P}^i L(\partial)U_n = \mathbb{P}^i \delta_{n,1}f^{os} + \mathbb{P}^i \delta_{n,1}f^{ev}, \\ BU_{n|_{x_d=x_d=0}} = \delta_{n,1}g, \\ U_{n|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

pour les termes d'ordre supérieur.

Les premières équations des cascades (2.33) et (2.34) découlent de la forme de la solution de (2.31) et les deuxièmes de la condition de compatibilité  $\mathbb{P}^i F = 0$  du lemme 2.3.1.

Le premier terme du développement doit satisfaire les conditions (2.33) de polarisation et de propagation ainsi que la condition de bord et la condition initiale que l'on écrit en le décomposant sur les espaces  $P_{ev}$  et  $P_{os}$  :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{ev}U_0^{ev} = U_0^{ev}, \\ \mathbb{P}_{os}U_0^{os} = U_0^{os}, \\ \mathbb{P}_{os}^i L(\partial)\mathbb{P}_{os}U_0^{os} = 0, \\ \mathbb{P}_{ev}^i L(\partial)\mathbb{P}_{ev}U_0^{ev} = 0, \\ B[U_0^{os} + U_{0|_{x_d=0}}^{ev}]_{|_{x_d=0}} = 0, \\ U_{0|_{t \leq 0}}^{os} = U_{0|_{t \leq 0}}^{ev} = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Cependant, on a vu au lemme 2.3.1 que l'on avait la relation  $\mathbb{P}_{ev}^i = 0$ . Donc la quatrième équation de (2.35) est une tautologie. Ce même lemme donne aussi la relation  $\mathbb{P}_{os}^i = \mathbb{P}_{os}$  qui permet de réécrire la troisième équation de (2.35) sous la forme :

$$\mathbb{P}_{os}L(\partial)\mathbb{P}_{os}U_0^{os} = 0.$$

Par conséquent, les équations d'évolution sur les termes oscillants et évanescents ne sont reliées que par la condition de bord. On commence par étudier l'équation sur le terme principal oscillant.

### 2.3.1 Construction du terme principal oscillant.

Grâce à la décomposition donnée au lemme 2.1.2 et d'après la définition de  $\mathbb{P}_{os}$  on peut identifier chaque terme dans le développement de  $U_0^{os}$  de la façon suivante :

$$\forall m \in \{1, \dots, q\}, \begin{cases} \Pi_m u_{0,m} = u_{0,m}, \\ \Pi_m L(\partial)u_{0,m} = 0, \\ B\left[\sum_{m=1}^M u_{0,m} + U_{0|_{x_d=0}}^{ev}\right]_{|_{x_d=0}} = 0, \\ u_{0,m|_{t \leq 0}} = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

On rappelle le lemme suivant qui va permettre de se ramener à une équation de transport :

**Lemme 2.3.2** [Lax57] *Sous l'hypothèse 2.1.1, on a l'égalité suivante :*

$$\Pi_m L(\partial) \Pi_m u_{0,m} = (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) u_{0,m},$$

où on rappelle que  $v_m := \nabla \lambda_{k_m}(\eta, \underline{\omega}_m)$  est la vitesse de groupe associée à la phase  $\varphi(t, x') + \underline{\omega}_m x_d$ .

On va maintenant distinguer deux cas selon l'ensemble d'appartenance de  $m$ .

**Premier cas :**  $m \in \mathcal{O}$

Par définition, la vitesse de groupe  $v_m$  est sortante ; ainsi l'équation de transport associée au système (2.36) ne voit pas la condition sur le bord et s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) u_{0,m} = 0, \\ u_{0,m}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

et s'intègre le long des caractéristiques. Ainsi  $u_{0,m}$  est solution d'une équation de transport homogène à donnée initiale nulle donc  $u_{0,m}$  est nulle ainsi que sa trace en  $\{x_d = 0\}$ .

**Deuxième cas :**  $m \in \mathcal{I}$

A l'inverse du cas précédent le phénomène étant entrant l'équation de transport nécessite de prendre en considération la condition de bord ; on a par conséquent :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) u_{0,m} = 0, \\ B \left[ \sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{0,m} + (\mathbb{P}_{ev} U_0^{ev})|_{X_d=0} \right]|_{x_d=0} = -B \sum_{m \in \mathcal{O}} \Pi_m u_{0,m} = 0, \\ u_{0,m}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Etudiant de plus près le terme de gauche de la condition de bord, on remarque que :

$$\sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{0,m}|_{x_d=0} + \Pi_-^e U_0^{ev}(t, x', 0, 0) \in \text{vect} \{e\}.$$

En vue d'assurer la condition de bord on doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{0,m}|_{x_d=0} = 0, \forall m \in \mathcal{I}, \\ \Pi_-^e U_0^{ev}(t, x', 0, 0) = \alpha_0(t, x')e, \end{cases} \quad (2.37)$$

où  $\alpha_0$  est une fonction scalaire à déterminer. Par conséquent, l'équation de transport pour un terme entrant s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) u_{0,m} = 0, \\ u_{0,m}|_{x_d=0} = 0, \\ u_{0,m}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

qui montre une fois de plus que pour tout  $m \in \mathcal{I}$ , l'amplitude  $u_{0,m}$  est nulle ainsi que sa trace sur  $\{x_d = 0\}$ .<sup>4</sup>

### 2.3.2 Terme principal évanescent.

Pour le terme principal évanescent on doit résoudre :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{ev} U_0^{ev} = U_0^{ev}, \\ B \Pi_-^e U_0^{ev}(t, x', 0, 0) = 0, \\ U_0^{ev}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

<sup>4</sup>On peut remarquer ici, que ni la présence d'un terme source sur le bord d'ordre un en  $\varepsilon$ , ni la présence d'un terme source oscillant à l'intérieur d'ordre un en  $\varepsilon$  ne suffisent à créer un terme oscillant d'ordre zéro dans le développement BKW. Ceci permettra de montrer par la suite que la perte de régularité dans l'estimation d'énergie est portée par la composante évanescente de la solution.

Ce système d'équation est le même que celui régissant le premier terme du développement BKW pour une fréquence vérifiant l'hypothèse 2.1.3 (voir (2.14)). Il est donc tentant de suivre la même méthode que celle décrite au sous-paragraphe 2.2.1 et de voir dans quelle mesure il faut l'adapter ici. On commence donc par s'intéresser aux équations (2.34) vérifiées par le terme évanescent  $U_1^{ev}$  :

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P}_{ev})U_1^{ev} = \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0^{ev}), \\ B \left[ U_1^{os} + U_{1|_{x_d=0}}^{ev} \right]_{|_{x_d=0}} = g, \\ U_{1|_{t \leq 0}}^{ev} = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Comme pour le premier terme, la première équation de (2.39) est explicite dans le sens où elle ne dépend que de  $\Pi_-^e U_1(t, x, 0)$  et encore une fois c'est la seconde équation qui pose problème et ce pour deux raisons. La première est encore une fois l'absence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans  $E_-^e(\zeta)$  et la seconde est qu'elle fait intervenir des termes oscillants d'ordre un en  $\varepsilon$  qui ne sont pas connus.

Cependant on a vu au sous-paragraphe 2.3.1 que l'on pouvait déterminer les termes oscillants plus ou moins indépendamment des termes évanescents. C'est donc ce que l'on va faire avant de continuer plus avant dans la détermination du terme principal évanescent.

### 2.3.3 Termes oscillants d'ordre un en $\varepsilon$ .

On considère le système d'équations (2.34) vérifié par le terme oscillant d'ordre un en  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} (I - \mathbb{P}_{os})U_1^{os} = -\mathbb{Q}_{os}(L(\partial)U_0^{os}), \\ \mathbb{P}_{os}L(\partial)U_1^{os} = f^{os}, \\ BU_{1|_{x_d=x_d=0}} = g, \\ U_{1|_{t \leq 0}}^{os} = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Puisque le terme  $U_0^{os}$  est maintenant connu (on sait même que ce dernier est nul), on voit que la première équation détermine la partie non polarisée de  $U_1^{os}$  qui doit donc être nulle ainsi que sa trace sur  $\{x_d = 0\}$ . Il suffit donc de déterminer la partie polarisée,  $\mathbb{P}_{os}L(\partial)U_1^{os}$ , pour cela combinant les deux premières équations de (2.40) on a :

$$\mathbb{P}_{os}L(\partial)\mathbb{P}_{os}U_1^{os} = f^{os}.$$

Descendant au niveau des amplitudes  $u_{1,m}$  et utilisant le lemme de Lax, on peut se ramener en réitérant la construction effectuée dans le sous-paragraphe 2.3.1 aux équations de transport sur  $\Pi_m u_{1,m}$  :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) \Pi_m u_{1,m} = f_m^{os}, \\ \Pi_m u_{1,m|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad \text{si } m \in \mathcal{O}. \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) \Pi_m u_{1,m} = f_m^{os}, \\ B \left( \sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{1,m|_{x_d=0}} + U_1^{ev}(t, x', 0, 0) \right) = g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} \Pi_m u_{1,m|_{x_d=0}}, \\ \Pi_m u_{1,m|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad \text{si } m \in \mathcal{I}. \quad (2.42)$$

L'équation (2.41) est une équation de transport qui détermine de façon unique  $\Pi_m u_{1,m} = u_{1,m}$  ainsi que sa trace en  $\{x_d = 0\}$  pour tout indice  $m \in \mathcal{O}$ . On insiste sur le fait qu'a priori  $u_{1,m}$  est non nulle car l'équation de transport n'est pas homogène à l'intérieur du domaine.

Le cas d'un indice entrant est légèrement plus complexe puisque la condition de bord fait intervenir la valeur du terme évanescent. On commence par décomposer le terme évanescent en sa partie polarisée et sa partie non polarisée. Ainsi l'équation au bord de (2.42) s'écrit sous la forme :

$$B \left( \sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{1, m|_{x_d=0}} + \Pi_-^e U_1^{ev}(t, x', 0, 0) \right) = g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} \Pi_m u_{1, m|_{x_d=0}} - B \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0^{ev}),$$

où on a utilisé la relation suivante sur la partie non polarisée de  $U_1^{ev}$  :

$$(I - \mathbb{P}_{ev})U_1^{ev} = \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0^{ev}).$$

Le point important pour conclure est encore une fois que le vecteur

$$\sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{1, m|_{x_d=0}} + \Pi_-^e U_1^{ev}(t, x', 0, 0),$$

apparaissant dans le terme de gauche est un élément de  $E_-(\underline{\zeta})$ .

Ainsi, en composant à gauche par le vecteur  $b$  défini à la définition 2.1.5, on se ramène à étudier la condition de compatibilité :

$$b \cdot B \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0^{ev}) = b \cdot \left( g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} \Pi_m u_{1, m|_{x_d=0}} \right). \quad (2.43)$$

De plus, en vertu de la définition 2.1.5, on peut trouver  $w_1 \in \check{E}_-(\underline{\zeta})$  tel que la décomposition suivante soit vérifiée :

$$\sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{1, m|_{x_d=0}} + \Pi_-^e U_1^{ev}(t, x', 0, 0) = \tilde{\alpha}_1(t, x')e + w_1(t, x'). \quad (2.44)$$

Appliquant  $B$  et utilisant la condition de bord de (2.42),  $w_1$  est déterminé de façon unique par la formule :

$$w_1(t, x') = B_{|\check{E}_-(\underline{\zeta})}^{-1} \left( g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} \Pi_m u_{1, m|_{x_d=0}} - B \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0^{ev}) \right). \quad (2.45)$$

Par conséquent,  $w_1$  est connu si et seulement si on connaît  $U_0^{ev}$ .

On pourrait croire être revenu au même point qu'à la fin du sous-paragraphe 2.3.2. Cependant on a réussi à exhiber la condition de compatibilité (2.43) qui va permettre de déterminer  $U_0^{ev}$  comme le montre le sous-paragraphe suivant.

### 2.3.4 Retour sur la construction du terme évanescent principal.

La condition de compatibilité (2.43) s'écrivant :

$$\begin{aligned} b \cdot B \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0^{ev})|_{x_d=X_d=0} &= b \cdot \left( g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} u_{1, m|_{x_d=0}} \right), \\ &:= \tilde{g}_0(t, x'), \end{aligned}$$

on peut réitérer la méthode décrite dans le paragraphe 2.2.1 pour démontrer la proposition :

**Proposition 2.3.1** *La fonction  $\alpha_0$  définie en (2.37) est solution de l'équation de transport*

$$\begin{cases} ib \cdot \beta(\underline{\zeta}) (\partial_\tau \theta(\underline{\zeta}) \partial_t \alpha_0 + \nabla_\eta \theta(\underline{\zeta}) \cdot \nabla_x \alpha_0) = \tilde{g}_0, \\ \alpha_0|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (2.46)$$

où l'on a posé  $\tilde{g}_0 = b \cdot \left( g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} u_{1, m|_{x_d=0}} \right)$ .

Ainsi  $\alpha_0$  est déterminée de façon unique, est non nulle si  $\tilde{g}_0$  l'est<sup>5</sup> et admet la même régularité que  $\tilde{g}_0$  (i.e. une régularité  $H^\infty(\partial\Omega_T)$ ). Par l'équation (2.37) il en est de même pour la "double trace"  $\Pi_-^e U_0^{ev}(t, x', 0, 0)$ .

Donc la "double trace"  $\Pi_-^e U_0^{ev}(t, x', 0, 0)$  est déterminée. Et réitérant les observations de la fin du sous-paragraphe 2.2.1, il suffit de la relever en une "trace simple" sur  $\{X_d = 0\}$  pour obtenir une solution du système (2.38) s'écrivant sous la forme :

$$U_0^{ev}(t, x, X_d) := \alpha_0(t, x') \chi(x_d) e^{X_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} e,$$

où  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant  $\chi(0) = 1$ .

**Remarque** Encore une fois, à ce stade on perd l'unicité du développement BKW.

### 2.3.5 Retour sur la construction des termes oscillants entrants.

Une fois que l'on a fixé une fonction de relèvement  $\chi$ , le terme principal évanescent est connu. Donc  $w_1$  défini en (2.44) est déterminé par la formule (2.45). Mais puisque  $w_1 \in \check{E}_-(\underline{\zeta})$  il peut être décomposé de la façon suivante :

$$w_1 = v_1^h + v_1^e,$$

avec  $v_1^h \in E_-^h(\underline{\zeta})$  et  $v_1^e \in E_-^e(\underline{\zeta})$ . Ainsi identifiant sur les sous-espaces  $E_-^h(\underline{\zeta})$  et  $E_-^e(\underline{\zeta})$  on obtient les deux équations :

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathcal{I}} u_{1, m|_{x_d=0}} = v_1^h, \\ \Pi_-^e U_1^{ev}(t, x', 0, 0) = \alpha_1(t, x') e + v_1^e(t, x'). \end{cases}$$

Ceci permet de reformuler l'équation (2.42) sous la forme :

$$\forall m \in \mathcal{I}, \quad \begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) \Pi_m u_{1, m} = f_m^{os}, \\ \sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{1, m|_{x_d=0}} = v_1^h, \\ \Pi_m u_{1, m|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases}$$

équations que l'on peut intégrer le long des caractéristiques pour déterminer  $u_{1, m}$  pour tout  $m \in \mathcal{I}$ .

**Remarque** Contrairement aux termes sortants, les termes entrants d'ordre supérieur à zéro ne sont plus déterminés de façon unique. En effet, le fait que  $U_0^{ev}$  ne soit pas déterminé de façon unique se répercute sur  $w_1$  par le biais de l'équation (2.45). Et par voie de conséquence,  $v_1^h$  n'est pas déterminé de façon unique.

<sup>5</sup>Il est intéressant de remarquer que le terme source à l'intérieur de l'équation de transport (2.46) peut être rendu non nul si on choisit un terme source sur le bord pour le système (2.1) d'ordre un en  $\varepsilon$ , ou (a priori), et c'est une nouveauté par rapport au sous-paragraphe 2.2, si on choisit un terme source à l'intérieur oscillant pour le système (2.1) d'ordre un en  $\varepsilon$ . C'est comme on le verra dans la démonstration du théorème 2.4.2, de cette nouvelle possibilité de rendre  $\tilde{g}_0$  non nul que viendra la perte de dérivée à l'intérieur dans l'estimation d'énergie si la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans le cas elliptico-hyperbolique.

### 2.3.6 Construction du second terme évanescent.

La construction du second terme est assez similaire à celle du premier ; on se contente donc d'en décrire les grandes lignes.

Reprenant l'équation (2.39),  $U_0^{ev}$  étant maintenant connu, il suffit de déterminer la partie polarisée  $\Pi_-^e U_1^{ev}(t, x, 0)$ . Comme pour le premier terme évanescent, on décompose :

$$\Pi_-^e U_1^{ev}(t, x', 0, 0) = \alpha_1(t, x')e + v_1(t, x'),$$

et la condition de bord permet de déterminer  $v_1(t, x')$ .

Ainsi, il suffit de déterminer  $\alpha_1$ . Pour cela il suffit de réitérer exactement la même construction que celle décrite dans le sous-paragraphe 2.3.4, pour montrer qu'il existe une fonction  $\tilde{g}_1 \in H^\infty(\partial\Omega_T)$  telle que  $\alpha_1$  soit solution de l'équation de transport :

$$\begin{cases} ib \cdot \beta(\underline{\zeta}) (\partial_\tau \theta(\underline{\zeta}) \partial_t \alpha_1 + \nabla_\eta \theta(\underline{\zeta}) \cdot \nabla_x \alpha_1) = \tilde{g}_1, \\ \alpha_1|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Mimant la fin du sous-paragraphe 2.3.4, il faut donc maintenant étendre  $\Pi_-^e U_1^{ev}(t, x', 0, 0)$  aux  $x_d$  positifs. On peut par exemple poser :

$$U_1^{ev}(t, x, X_d) := \chi(x_d) e^{X_d A(\underline{\zeta})} [\alpha_1(t, x')e + v_1(t, x')] + \mathbb{Q}_{ev}(f^{ev} - L(\partial)U_0^{ev})(t, x_d, X_d).$$

### 2.3.7 Termes d'ordre supérieur.

Dans ce sous-paragraphe on décrit en guise de résumé la méthode de construction des termes d'ordre supérieur.

◊ La première équation de (2.34) donne automatiquement les parties non polarisées de  $U_{n+1}^{os}$  et de  $U_{n+1}^{ev}$ . Donc il suffit de déterminer les parties polarisées.

◊ On commence par travailler sur les termes oscillants sortants, la deuxième équation de (2.34) conduit par le lemme de Lax à une équation de transport de la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) \Pi_m u_{n+1, m} = F_m, \\ \Pi_m u_{n+1, m}|_{t \leq 0} = -(I - \Pi_m) u_{n+1, m}|_{t \leq 0}. \end{cases}$$

où  $F_m$  est une fonction dépendant de  $(I - \Pi_m) u_{n+1, m}$  et éventuellement du terme source oscillant. Résolvant cette équation de transport, les termes oscillants sortants sont connus.

◊ La condition de bord pour les termes oscillants entrants et pour le terme évanescent s'écrit :

$$\begin{aligned} B \left( \sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{n+1, m}|_{x_d=0} + \Pi_-^e U_{n+1}^{ev} \right) = & - B \left( \sum_{m \in \mathcal{O}} u_{n+1, m}|_{x_d=0} + ((I - \mathbb{P}_{ev}) U_{n+1}^{ev})|_{x_d=X_d=0} \right. \\ & \left. - \sum_{m \in \mathcal{I}} (I - \Pi_m) u_{n+1, m}|_{x_d=0} \right), \end{aligned}$$

qui après une décomposition de la forme (2.44) permet de déterminer  $u_{n+1, m}|_{x_d=0}$  comme solution d'une équation de transport dont on connaît la trace sur le bord  $\partial\Omega_T$ .

◊ Pour construire  $U_{n+1}^{ev}$  il suffit de connaître  $\Pi_-^e U_{n+1}^{ev}(t, x', 0, 0)$ . Cette "double trace" peut être décomposée sous la forme :

$$\Pi_-^e U_{n+1}^{ev}(t, x', 0, 0) = \alpha_{n+1}(t, x')e + v_{n+1}(t, x').$$

La condition de bord vérifiée par  $U_{n+1}^{ev}$  permet de déterminer  $v_{n+1}$ . Pour déterminer la fonction scalaire  $\alpha_{n+1}$ , on s'intéresse à la condition de bord vérifiée par  $U_{n+2}^{ev}$ . Après avoir déterminé les termes oscillants sortants de rang  $n+2$  cette condition s'écrit sous la forme :

$$B \left( \sum_{m \in \mathcal{I}} \Pi_m u_{n+2,m|_{x_d=0}} + \Pi_-^e U_{n+2}^{ev} \right) = G + B \left( \mathbb{Q}_{ev} L(\partial) U_{n+1|_{x_d=X_d=0}}^{ev} \right),$$

où  $G$  est une fonction dépendant des traces de  $u_{n+2,m}$ ,  $(I - \Pi_m)u_{n+2,m}$  et éventuellement des termes sources. On prend le produit scalaire de cette équation par  $b$  (pour annuler le terme de gauche) et on obtient une équation de compatibilité sur  $U_{n+1|_{x_d=X_d=0}}^{ev}$  qui d'après la méthode de Marcou est une équation de transport permettant de déterminer  $\alpha_{n+1}$ .

On a donc démontré la proposition suivante :

**Proposition 2.3.2** *Il existe une suite de fonctions  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P$  qui vérifie les cascades d'équations (2.29) et (2.30).*

### 2.3.8 Justification du développement.

On rappelle le théorème suivant qui établit le caractère faiblement bien posé des problèmes aux limites vérifiant l'hypothèse 2.1.4

**Théorème 2.3.1** [Cou02] *Sous les hypothèses 2.1.1-2.1.2 et 2.1.4, pour tout choix de termes sources  $f \in L_{x_d}^2(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T))$  et  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)$ , nuls pour les temps négatifs, le problème aux limites (2.1) admet une unique solution  $u \in L^2(\Omega_T)$  qui vérifie l'estimation d'énergie suivante :*

$$\|u\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{H_\gamma^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \leq \frac{C}{\gamma^2} \left( \|f\|_{L_{x_d}^2(H_\gamma^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T))}^2 + \|g\|_{H_\gamma^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \right), \quad (2.47)$$

pour tout  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$  et où la constante  $C$  est indépendante de  $\gamma$  et de  $T$ .

De plus, comme pour le théorème 2.2.1, une régularité supérieure des données du problème se transmet à la solution.

De façon équivalente, sans la dépendance en  $\gamma$ , l'estimation d'énergie (2.47) devient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L_{x_d}^2(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T))}^2 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \right). \quad (2.48)$$

Comme dans le sous-paragraphe 2.2.4, on va montrer que le développement BKW que l'on a construit dans les sous-paragraphe précédents converge vers la solution exacte du problème aux limites (2.1) donnée par le théorème 2.3.1.

Pour  $N_0 \in \mathbb{N}$ , on définit

$$u_{app,N_0}^\varepsilon(t, x) := \sum_{n \leq N_0} \varepsilon^n e^{i\frac{\varphi}{\varepsilon}} U_n \left( t, x, \frac{x_d}{\varepsilon} \right),$$

le développement BKW tronqué à l'ordre  $N_0$ .

Comme dans le sous-paragraphe 2.2.4, la convergence de  $u_{app,N_0}^\varepsilon$  vers la solution exacte du problème aux limites (2.1) est formulée dans les espaces  $H_\varepsilon^s(\Omega_T)$  introduits dans la définition 2.2.1. Le résultat de convergence, qui justifie le développement BKW, est le suivant :

**Théorème 2.3.2** *Sous les hypothèses 2.1.1-2.1.2 et 2.1.4, si  $u^\varepsilon$  désigne la solution exacte du problème aux limites (2.1), l'écart  $u_{app,N_0}^\varepsilon - u^\varepsilon$  est  $O(\varepsilon^{N_0+1})$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$ .*

**Démonstration :** La démonstration de ce théorème suit la même méthode que celle du théorème 2.2.2. A ceci près qu'ici on a besoin d'estimer l'erreur entre  $u^\varepsilon$  et  $u_{app,N_0+2}^\varepsilon$  (en effet, estimer  $u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon$  donne une vitesse de convergence en  $O\left(\varepsilon^{N_0+\frac{1}{2}}\right)$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$ , qui n'est pas suffisante pour démontrer le théorème 2.4.2) et que les estimations ont besoin d'être effectuées en norme  $L_{x_d}^2(\mathbb{R}_+; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T))$  au lieu des normes  $L^2(\Omega_T)$  utilisées dans la démonstration du théorème 2.2.2.

L'écart  $u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u^\varepsilon$  vérifie le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(\partial) \left( u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u^\varepsilon \right) = \varepsilon^{N_0+2} e^{i\frac{\partial}{\varepsilon}} \left( L(\partial) U_{N_0+2}^{os} + L(\partial) U_{N_0+2}^{ev} \right) |_{X_d=\frac{x_d}{\varepsilon}}, \\ B \left( u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u^\varepsilon \right) = 0, \\ \left( u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u^\varepsilon \right) |_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

D'après la proposition 2.2.4 et par interpolation entre les espaces  $L^2(\partial\Omega_T)$  et  $H^1(\partial\Omega_T)$  on montre que pour tout indice  $N$ ,  $L(\partial)U_N^{ev}$  est  $O(1)$  dans  $L_{x_d}^2(\mathbb{R}_+; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T))$ . La même interpolation montre aussi que  $L(\partial)U_N^{os}$  est  $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$  dans  $L_{x_d}^2(\mathbb{R}_+; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T))$ . Ainsi, le terme limitant est le terme oscillant.

Utilisant l'estimation d'énergie (2.48), on en déduit que

$$\|u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}.$$

Réitérant les estimations pour les dérivées de la preuve du théorème 2.2.2, on montre ensuite que pour tout multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$  :

$$\varepsilon^{|\alpha|} \|\partial^\alpha (u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}.$$

Donc  $u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u^\varepsilon$  est  $O\left(\varepsilon^{N_0+\frac{3}{2}}\right)$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$ . Or,  $u_{app,N_0+2}^\varepsilon - u_{app,N_0}^\varepsilon$  est  $O(\varepsilon^{N_0+1})$  dans  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$ . On conclut par l'inégalité triangulaire.

□

## 2.4 Saturations d'énergie.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'optimalité des estimations d'énergies obtenues dans [ST88] et dans [Cou02]. La démonstration ci-dessous se base sur les mêmes arguments que celle pour établir l'optimalité pour un problème aux limites pour lequel la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est pas vérifiée dans la partie hyperbolique décrits dans [CG10].

### 2.4.1 Saturation de l'estimation d'énergie (2.25).

On commence par l'estimation (2.25). On se place donc dans le cas d'une fréquence elliptique vérifiant l'hypothèse de stabilité 2.1.3.

**Théorème 2.4.1** *Soit  $s > 0$ , on suppose que pour tout  $f \in L^2(\Omega_T)$  et  $g \in H^s(\partial\Omega_T)$  il existe une unique solution  $u \in L^2(\Omega_T)$  du problème aux limites (2.1) qui vérifie de plus une estimation d'énergie de la forme*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{H^s(\partial\Omega_T)}^2 \right). \quad (2.49)$$

*Alors, nécessairement  $s \geq \frac{1}{2}$ .*



**Démonstration :** Par l'absurde, on suppose que  $s = \frac{1}{2} - \delta$ , avec  $\delta > 0$ .

On choisit dans le problème aux limites (2.1), les termes source suivants :

$$f \equiv 0, \text{ et } g^\varepsilon := \varepsilon \psi(t, x') e^{i \frac{x_d}{\varepsilon}} b,$$

où  $\psi(t, x') \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$  est nulle pour les temps négatifs et strictement positive sur  $]0, T[$ , et où le vecteur  $b$  est celui introduit dans la définition 2.1.5.

On a clairement  $g = O(\varepsilon)$  dans  $L^2(\partial\Omega_T)$  et  $g = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)$ . D'après l'inégalité d'interpolation classique pour les espaces de Sobolev appliquée à  $s$  dans  $[0, \frac{1}{2}[$  on a :

$$\|g\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2} + \delta}.$$

Utilisant l'estimation d'énergie (2.49), il vient que  $u^\varepsilon$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2} + \delta}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

D'après le théorème 2.2.2, on sait que l'on peut construire  $U_0 \in P_{ev}$  tel que  $(u^\varepsilon - e^{i \frac{x_d}{\varepsilon}} U_0)$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . En particulier,  $(u^\varepsilon - e^{i \frac{x_d}{\varepsilon}} U_0)$  est aussi  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2} + \delta}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

Utilisant l'inégalité triangulaire,  $e^{i \frac{x_d}{\varepsilon}} U_0$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2} + \delta}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ , mais reprenant la construction de  $U_0$  on sait que cette amplitude est de la forme :

$$U_0(t, x, X_d) = \chi(x_d) \alpha_0(t, x') e^{X_d \mathcal{A}(\underline{\zeta})} e. \quad (2.50)$$

Le point crucial pour conclure est donné par le lemme suivant qui établit qu'une fonction non nulle de la forme (2.50) ne peut pas être mieux que  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

**Lemme 2.4.1** *Soit  $U_0$  une fonction de la forme (2.50) ; alors  $U_0(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon})$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . Cette propriété est optimale au sens où s'il existe  $\kappa > 0$  tel que  $U_0$  soit  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2} + \kappa}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ , alors  $U_0$  est nulle dans  $L^2(\Omega_T)$ .*

**Démonstration :** La première assertion a déjà été prouvée dans la proposition 2.2.4. Pour montrer la seconde on utilise le fait que pour tout  $w \in \mathbb{C}^k$ ,  $\mathcal{M} \in \mathbf{M}_k(\mathbb{C})$  on a

$$|e^{\mathcal{M}} w|^2 \geq e^{-2\|\mathcal{M}\|} |w|^2.$$

Conséquemment,

$$\|U_0\|_{L^2(\Omega_T)} \geq \|\alpha_0\|_{L^2(\partial\Omega_T)} \left( \int_0^{+\infty} \chi(x_d) e^{\frac{-2x_d}{\varepsilon} \|\mathcal{A}(\underline{\zeta})\|} |e|^2 dx_d \right)^{\frac{1}{2}},$$

puis par le changement de variable  $s = \frac{x_d}{\varepsilon}$  il vient

$$\begin{aligned} \|U_0\|_{L^2(\Omega_T)} &\geq \varepsilon^{\frac{1}{2}} C_{\alpha_0, e} \left( \int_0^{+\infty} \chi(\varepsilon u) e^{-2s \|\mathcal{A}(\underline{\zeta})\|} ds \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\geq C_{\alpha_0, e, \chi, \|\mathcal{A}(\underline{\zeta})\|} \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Utilisant le lemme 2.4.1,  $e^{i \frac{x_d}{\varepsilon}} U_0$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2} + \delta}\right)$  si et seulement si  $\|\alpha_0\|_{L^2(\partial\Omega_T)}$  est nulle et donc  $\alpha_0$  est nulle. Reprenant la construction de la fonction  $\alpha_0$  on sait que cette fonction est solution de l'équation de transport (2.46) avec

$$\tilde{g}_0 = \psi |b|^2 \neq 0.$$

Donc,  $\alpha_0$  est solution d'une équation de transport non homogène, par conséquent  $\alpha_0$  est non nulle d'où la contradiction recherchée qui implique que  $s \geq \frac{1}{2}$ . □

### 2.4.2 Saturation de l'estimation d'énergie (2.48).

Dans ce sous-paragraphe on montre l'optimalité de l'estimation d'énergie (2.48). On se place donc dans le cadre d'une fréquence vérifiant l'hypothèse de stabilité 2.1.4. De plus, afin de se placer sous les mêmes conditions qu'au théorème 2.3.1 (bien que cela ne soit pas nécessaire pour construire le développement BKW), on imposera que  $E_+^h(\underline{\zeta}) \neq \{0\}$ . En d'autres termes, on suppose qu'il existe une phase hyperbolique sortante.

Afin de démontrer l'optimalité de l'estimation d'énergie, on a besoin de l'hypothèse technique suivante :

**Hypothèse 2.4.1** *Soit une fréquence  $\underline{\zeta} \in \mathcal{EH}$ , telle que  $\ker B \cap E_-(\underline{\zeta}) \neq \{0\}$ , alors  $E_+^h(\underline{\zeta})$  n'est pas trivial.*

*De plus  $BE_+^h(\underline{\zeta})$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $BE_-(\underline{\zeta})$ . De façon équivalente, en utilisant le vecteur  $b$  introduit dans la définition 2.1.5, il existe un vecteur  $\vec{u} \in E_+^h(\underline{\zeta})$  tel que*

$$b \cdot B\vec{u} \neq 0.$$

On renvoie au sous-paragraphe 2.5.1 pour des exemples de problème aux limites qui satisfont cette hypothèse et pour des commentaires sur l'estimation que l'on est en droit d'attendre si cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Le théorème principal de ce sous-paragraphe est le suivant :

**Théorème 2.4.2** *Sous les hypothèses 2.1.1-2.1.2-2.1.4 et 2.4.1, soit  $s_1, s_2 > 0$ , tels que pour tout  $f \in L_{x_d}^2(H_{(t,x')}^{s_1})(\Omega_T)$  et pour tout  $g \in H^{s_2}(\partial\Omega_T)$ , il existe une unique solution  $u \in L^2(\Omega_T)$  du problème aux limites (2.1) qui vérifie de plus l'estimation d'énergie :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L_{x_d}^2(H_{(t,x')}^{s_1})(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{H^{s_2}(\partial\Omega_T)}^2 \right). \quad (2.51)$$

*Alors on a nécessairement  $s_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $s_2 \geq \frac{1}{2}$ .*

Ce théorème montre donc que malgré le fait que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère en raison des modes évanescents, le phénomène de stabilité faible est toutefois amplifié par l'existence de composantes hyperboliques. En effet, par rapport au cas elliptique on voit apparaître une perte d'une demi dérivée à l'intérieur du domaine.

Cette perte d'une demi dérivée n'est pas anodine puisqu'elle exclut notamment les techniques de point fixe après linéarisation pour résoudre les problèmes aux limites non linéaires.

**Démonstration :** On commence par démontrer l'optimalité de la perte de dérivée à l'intérieur du domaine.

Par l'absurde, on suppose que  $s_1 = \frac{1}{2} - \delta$ , pour un certain  $\delta \in ]0, \frac{1}{2}[$ .

On pose comme terme source pour le problème aux limites (2.1)

$$\begin{aligned} g &= 0, \text{ et } f^\varepsilon := \varepsilon e^{i\frac{\varphi}{\varepsilon}} f^{os} \left( t, x, \frac{x_d}{\varepsilon} \right), \\ f^{os} \left( t, x, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) &:= \psi(t, x) e^{i\omega_{m_0} \frac{x_d}{\varepsilon}} e_+^h, \end{aligned}$$

où  $e_+^h \in (E_+^h(\underline{\zeta}) \setminus \{0\})$  est choisi de manière à assurer que

$$b \cdot Be_+^h \neq 0.$$

(Ce choix est rendu licite grâce à l'hypothèse 2.4.1).

Par interpolation,

$$\|f^\varepsilon\|_{H^{s_1}(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta},$$

l'estimation d'énergie (2.51) permet alors de montrer que  $u^\varepsilon$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . On construit alors un développement BKW et par inégalité triangulaire, on montre que  $U_0 = U_0^{ev}$  le premier terme du développement est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

Or, le premier terme du développement BKW est donné par :

$$U_0^{ev}\left(t, x, \frac{x_d}{\varepsilon}\right) = \alpha_0(t, x')\chi(x_d)e^{\frac{x_d}{\varepsilon}\mathcal{A}(\zeta)}e,$$

ce qui implique que pour  $\alpha_0$  non nul,  $U_0^{ev}$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$  et pas mieux en vertu du lemme 2.4.1. Par conséquent  $\alpha_0$  doit être nul. Mais,  $\alpha_0$  est solution de l'équation de transport (2.46) avec comme terme source :

$$\tilde{g}_0 := b \cdot \left( g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} u_{1,m}|_{x_d=0} \right),$$

qui dans le cas présent se réduit à :

$$\tilde{g}_0 = -b \cdot B \left( \sum_{m \in \mathcal{O}} u_{1,m}|_{x_d=0} \right).$$

On conclut par la même technique que dans [CG10]. Pour  $m \in \mathcal{O}$ ,  $u_{1,m}$  est solution de l'équation de transport :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_m \cdot \nabla_x) u_{1,m} = \delta_{m,m_0} \psi(t, x) e_+^h, \\ u_{1,m}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

ainsi seule l'amplitude  $u_{1,m_0}$  est non nulle et est donnée par :

$$u_{1,m_0}(t, x) = \int_0^t \psi(s, x + (s-t)v_{m_0}) ds e_+^h.$$

Donc, on peut choisir la fonction  $\psi$  de manière à ce que le terme source

$$\tilde{g}_0 = -b \cdot B u_{1,m_0}|_{x_d=0},$$

soit non nul (car  $e_+^h$  est tel que  $b \cdot B e_+^h \neq 0$ ), ce qui implique que  $\alpha_0$  est non nul d'où la contradiction recherchée. On en déduit donc que  $s_1 \geq \frac{1}{2}$ .

On montre maintenant que la perte de dérivée sur le bord est optimale.

Par l'absurde, on suppose que  $s_2 = \frac{1}{2} - \delta$ ,  $\delta \in ]0, \frac{1}{2}[$ . La preuve est très semblable à celle mise en oeuvre pour montrer l'optimalité de l'estimation d'énergie (2.49), on n'utilise donc qu'un terme de forçage sur le bord. On pose par conséquent :

$$f \equiv 0 \text{ et } g(t, x') := \varepsilon e^{i\frac{\varphi}{\varepsilon}} \psi(t, x') b,$$

avec une fois de plus  $b$  provenant de la définition 2.1.5 et  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$ , nulle pour les temps négatifs et strictement positive sur  $]0, T[$ . Réitérant les mêmes arguments d'interpolation que précédemment, on peut montrer que

$$\|g^\varepsilon\|_{H^{s_2}(\partial\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta}.$$

Utilisant l'estimation d'énergie (2.51) on montre que  $u^\varepsilon$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . On construit maintenant un développement BKW ; on sait alors que

$$\|u^\varepsilon - e^{i\frac{\varphi}{\varepsilon}} U_0^{ev}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\varepsilon.$$

Donc,  $U_0^{ev}$  est  $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta}\right)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ , ce qui conduit en réitérant les arguments utilisés au sous-paragraphe 2.4.1 au fait que  $\alpha_0$  est nul. Or, l'équation de transport dont  $\alpha_0$  est solution est (2.46) où le terme source est donné par :

$$\tilde{g}_0 = b \cdot \left( g - B \sum_{m \in \mathcal{O}} u_{1,m|_{x_d=0}} \right),$$

qui dans le cas présent s'écrit :

$$\tilde{g}_0 = \psi |b|^2,$$

puisque en l'absence de terme source oscillant à l'intérieur, les termes oscillants d'ordre un sortants sont solutions de l'équation de transport homogène (2.41) et sont donc nuls. D'où la contradiction recherchée, car  $\alpha_0$  est solution d'une équation de transport non triviale donc ne peut être nul. On conclut donc que  $s_2 \geq \frac{1}{2}$ . □

## 2.5 Commentaires et conséquences.

### 2.5.1 Quelques commentaires sur l'hypothèse 2.4.1.

On commence par mentionner que l'hypothèse technique 2.4.1, dont on a eu besoin pour établir l'optimalité de l'estimation d'énergie (2.48), est vérifiée par tous les opérateurs hyperboliques  $L(\partial)$ , dont la matrice  $A_d$  admet une unique valeur propre simple positive. On rappelle que l'hypothèse 2.4.1 est équivalente à imposer l'existence d'un vecteur  $e_+^h \in E_+^h(\zeta)$  tel que  $b \cdot B e_+^h$  est non nul.

Ceci est automatiquement vérifié si  $p$  vaut 1, car dans ce cas,  $B$  est une matrice ligne et  $b = 1$ . Il suffit alors d'utiliser le fait que  $E_+^e(\zeta) = \{\bar{w} \mid w \in E_-^e(\zeta)\}$  pour montrer que :

$$\forall \bar{w} \in E_+^e(\zeta), b \cdot B \bar{w} = \overline{b \cdot B w} = 0.$$

Par conséquent, si  $b \cdot B e_+^h$  est nul, utilisant la décomposition (2.3), on obtient que  $b$  est nul ce qui contredit sa définition (voir définition 2.1.5).

En particulier, le système de transition de phase liquide-vapeur étudié dans [BG98] et [Cou02] et la linéarisation des équations d'Euler du sous-paragraphe 2.5.3 vérifient l'hypothèse 2.4.1. Ainsi, pour ces problèmes aux limites, le théorème 2.4.2 s'applique.

On fait maintenant quelques commentaires sur le type d'estimation d'énergie que l'on est en droit d'attendre pour un problème aux limites qui ne vérifie pas l'hypothèse 2.4.1, mais pour lequel on a toujours une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone elliptico-hyperbolique.

Si  $B E_+^h(\zeta)$  est inclus dans  $B E_-^e(\zeta)$  alors il ne semble pas possible d'utiliser le sous-espace instable  $E_+^h(\zeta)$  pour allumer un phénomène de transport le long de la frontière qui va ensuite venir propager la singularité à l'intérieur du domaine, comme on l'a fait dans la preuve du théorème 2.4.2. Le théorème 2.4.1 montre que les modes évanescents ne sont pas capables de propager une singularité de  $\partial\Omega_T$  vers l'intérieur de  $\Omega_T$ . De plus, l'analyse du problème de Cauchy linéaire montre très clairement qu'une instabilité ne peut en aucun cas se développer d'elle-même à l'intérieur du domaine.

On a donc des raisons de penser que si l'hypothèse 2.4.1 n'est pas vérifiée alors il pourrait ne pas y avoir de perte de dérivée à l'intérieur de  $\Omega_T$ . Toutefois puisque la seconde partie de la démonstration du théorème 2.4.2 est indépendante de l'hypothèse 2.4.1, la perte de dérivée sur le bord  $\partial\Omega_T$  persiste.

Par conséquent, un problème aux limites homogène sur le bord pour lequel la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est violée dans la zone elliptico-hyperbolique et qui ne vérifie pas l'hypothèse 2.4.1 semble être bien posé au sens où la solution ne subie pas de perte de dérivée si le terme source sur le bord est nul. L'analyse de ce cas dégénéré est laissé pour de futures études.

### 2.5.2 Classification et problèmes homogènes bien posés.

Les théorèmes 2.4.1 et 2.4.2, l'optimalité de l'estimation dans le cas d'une violation de la condition de Kreiss-Lopatinskii dans la zone hyperbolique démontrée dans [CG10] permettent de donner une classification partielle, car on a tout de même besoin de l'hypothèse technique 2.4.1 pour traiter le cas d'une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone elliptico-hyperbolique, mais toutefois assez proche de l'exhaustivité, des problèmes aux limites faiblement bien posés. Cette classification qui ne prend pas en compte une éventuelle violation de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la zone de "glancing" est la suivante :

◇ Si la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans la zone elliptique l'estimation d'énergie est :

$$\|u\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{H^{-\frac{1}{2}}_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \leq \frac{C}{\gamma^2} \left( \|f\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \right),$$

et le seul moyen pour ne pas perdre de dérivée sur le bord et d'avoir un problème bien posé est donc d'imposer que  $g$  soit nulle.

◇ Si la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans la zone elliptico-hyperbolique, et si l'hypothèse 2.4.1 est vérifiée, il apparait une perte d'une demi-dérivée à l'intérieur :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L^2_{x_d}(\mathbb{R}_+; H^{\frac{1}{2}}_{t,x'}(\Omega_T))}^2 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_T)}^2 \right).$$

Si l'hypothèse 2.4.1 n'est pas vérifiée on conjecture alors que l'estimation d'énergie est sans perte à l'intérieur du domaine. Par conséquent, dans ce cas de figure, un problème homogène sur le bord serait un autre exemple de problème bien posé.

◇ [CG10] Si la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans la zone hyperbolique, alors l'estimation d'énergie est la suivante :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2(\partial\Omega_T)}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L^2_{x_d}(\mathbb{R}_+; H^1_{t,x'}(\Omega_T))}^2 + \|g\|_{H^1(\partial\Omega_T)}^2 \right), \quad (2.52)$$

on perd donc une dérivée sur le bord et une dérivée à l'intérieur du domaine. De tels problèmes ne peuvent être bien posés.

### 2.5.3 Equation d'Euler et condition de bord dissipative.

Les théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 permettent aussi de décrire les régions où l'on peut imposer une condition de bord maximale dissipative à l'équation d'Euler linéarisée. En effet, ce système est hyperbolique à multiplicité constante et symétrique donc les précédents résultats s'appliquent et l'on peut aussi étudier la question de la dissipativité des conditions de bord.

On rappelle qu'une condition de bord est dite maximale dissipative si la matrice normale  $A_d$  est uniformément négative sur le noyau de la matrice de bord  $B$  c'est-à-dire :

$$\forall v \in \ker B, \langle A_d v, v \rangle \leq 0. \quad (2.53)$$

On peut facilement montrer (voir par exemple [BG07] chapitre 3) que la solution d'un problème aux limites symétrique (ou plus généralement symétrisable) qui admet une condition de bord maximale dissipative vérifie une estimation d'énergie sans perte à l'intérieur du domaine. De plus, pour les équations d'Euler linéarisées, la zone elliptique est toujours vide donc la partition de l'espace des fréquences ne contient que trois zones :

$$\Xi_0 = \mathcal{EH} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{G}.$$

Par conséquent le théorème 2.4.2 ainsi que l'optimalité de l'estimation d'énergie (2.52) démontrée par [CG10] permettent de conclure que la seule possibilité pour avoir une condition de bord maximale dissipative qui ne vérifie pas la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme ne peut se produire que si le déterminant de Lopatinskii s'annule dans la zone de glancing.

On étudie donc les équations d'Euler isentropiques linéarisées après adimensionnement autour d'un fluide subsonique entrant, posées dans un espace de dimension deux. C'est-à-dire que l'on s'intéresse au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \partial_t U + A_1 \partial_1 U + A_2 \partial_2 U = f, & \text{dans } \Omega_T, \\ BU|_{x_2=0} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_T, \\ U|_{t=0} = 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.54)$$

avec :

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} M & 0 & -1 \\ 0 & M & 0 \\ -1 & 0 & M \end{bmatrix},$$

où  $M \in ]-1, 0[$  désigne le nombre de Mach.

On écrit  $B$  sous la forme :

$$B := \begin{bmatrix} 1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix},$$

où  $b_2$  et  $b_3$  sont des réels. On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des paramètres  $(b_2, b_3)$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que la condition de bord associée à la matrice  $B$  soit une condition de bord maximale dissipative et par  $\tilde{\mathcal{G}}$  l'ensemble des  $(b_2, b_3)$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère dans la zone de glancing.  $\tilde{\mathcal{G}}$  est facilement calculable en réitérant des calculs similaires à ceux de [[BG07], chapitre 14] et est donné par :

$$\tilde{\mathcal{G}} = \left\{ (b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus b_2 = \pm \frac{1 + Mb_3}{\sqrt{1 - M^2}} \right\} := \Gamma_+^g \cup \Gamma_-^g.$$

On introduit  $\Delta(\sigma, \eta)$  un déterminant de Lopatinskii pour le problème aux limites (2.54). Les autres possibilités de condition de bord (voir [BGRSZ02]) sont légèrement plus compliquées à cal-

culer cependant on peut toutefois les lister de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\Gamma^0 &:= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta(1, 0) = 0\} \\
&= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus b_3 = 1\}, \\
\Gamma^w &:= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \exists \underline{\zeta} \in \mathcal{EH}, \Delta(\underline{\zeta}) = 0\} \\
&= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus b_3 = -M, |b_2| < \sqrt{1 - M^2}\}, \\
\Gamma^s &:= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \exists \underline{\zeta} \in \mathcal{H}, \Delta(\underline{\zeta}) = \partial_\sigma \Delta(\underline{\zeta}) = 0\} \\
&= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus b_3 > -M, b_2^2 + b_3^2 = 1\}, \\
SU &:= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \exists \underline{\zeta} \in \Xi \setminus \Xi_0, \underline{\zeta} \neq (1, 0), \Delta(\underline{\zeta}) = 0\} \\
&= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus b_3 > -M, b_2^2 + b_3^2 < 1\}, \\
SS &:= \{(b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \forall \underline{\zeta} \in \Xi, \Delta(\underline{\zeta}) \neq 0\} \\
&= \left\{ (b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus b_3 < -M, |b_2| < \frac{1 + Mb_3}{\sqrt{1 - M^2}} \right\} \\
&\cup \left\{ (b_2, b_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus b_3 > -\frac{1}{M}, |b_2| < -\frac{1 + Mb_3}{\sqrt{1 - M^2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Tous les paramètres  $(b_2, b_3)$  n'appartenant pas à cette liste entraînent que le problème aux limites (2.54) est dans la classe  $WR$ , c'est-à-dire que le déterminant de Lopatinskii  $\Delta$  s'annule dans la zone hyperbolique à l'ordre un exactement.

**Remarque** Les transitions entre les différentes zones décrites ci-dessus sont exactement celles prophétisées dans [BGRSZ02]. L'ensemble  $\Gamma^w$  contient des fréquences qui vérifient l'hypothèse 2.1.4 ainsi que l'hypothèse 2.4.1.

On a déjà mentionné au début de ce sous-paragraphe que nécessairement

$$\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{G}} \cup SS.$$

Cependant pour  $(b_2, b_3) \in \tilde{\mathcal{G}}$  la matrice associée à la forme quadratique  $\langle A_2 X, X \rangle$ ,  $X \in \ker B$  est donnée par

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} M \left( 1 + \frac{(1 + Mb_3)^2}{1 - M^2} \right) & \pm \frac{(1 + Mb_3)^2}{\sqrt{1 - M^2}} \\ \pm \frac{(1 + Mb_3)^2}{\sqrt{1 - M^2}} & (M(1 + b_3^2) + 2b_3) \end{bmatrix},$$

et on vérifie facilement que  $\det(\mathfrak{M}) < 0$  ce qui signifie que la forme quadratique  $\langle A_2 X, X \rangle$  n'est pas uniformément positive sur  $\ker B$ . Ceci revient à dire que  $\mathcal{D}$  n'intersecte pas  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

Lorsque  $(b_2, b_3) \in SS$  la matrice associée à la forme quadratique  $\langle A_2 X, X \rangle$ ,  $X \in \ker B$  est

$$\mathfrak{M}' = \begin{bmatrix} M(1 + b_2^2) & b_2(1 + Mb_3) \\ b_2(1 + Mb_3) & (M(1 + b_3^2) + 2b_3) \end{bmatrix}.$$

Or  $M(1 + b_2^2) < 0$ , donc  $\langle A_2 X, X \rangle$  n'est pas uniformément positive pour  $X$  si et seulement si  $\det(\mathfrak{M}') \geq 0$  ce qui revient à dire que :

$$b_2^2(M^2 - 1) + (Mb_3 + 1)^2 + (M^2 - 1) \geq 0.$$

Le bord de  $\mathcal{D}$  est une hyperbole, contenue dans  $SS$ . Pour les paramètres  $b_2$  et  $b_3$  choisis sur cette hyperbole les conditions de bord correspondantes sont maximales dissipatives mais pas strictement dissipatives (c'est-à-dire que l'inégalité (2.53) ne peut en aucun cas être stricte). Comme indiqué par le théorème 2.4.2,  $\Gamma^w$  n'intersecte pas  $\mathcal{D}$ .

On conclut la discussion précédente par le schéma suivant :

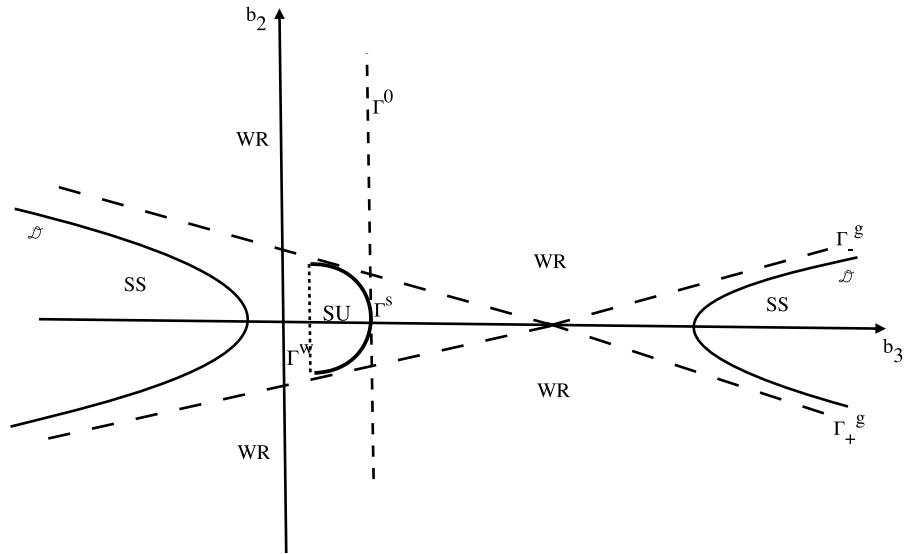


Figure 2.1: Les différents types de condition aux limites pour l'équation d'Euler linéarisée.





## Chapitre 3

# Vitesse finie de propagation dans la classe $WR$

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans la revue *Communications on Pure and Applied Analysis*, [Ben14a].

### 3.1 Introduction du chapitre 3.

Dans ce chapitre on se propose de montrer un résultat de vitesse finie de propagation pour les problèmes aux limites hyperboliques linéaires posés dans la classe  $WR$ . Plus précisément, on montrera ici une propriété d'unicité locale, la propriété de vitesse finie de propagation étant un corollaire de ce résultat. La classe  $WR$  a été introduite dans [BGRSZ02] et correspond à des problèmes faiblement bien posés.

La propriété de vitesse de propagation finie est bien connue et est l'une des caractéristiques des équations aux dérivées partielles hyperboliques. En effet, le fait que, pour le problème de Cauchy symétrique, l'information se propage au plus vite comme le module de la plus grande valeur propre du symbole en espace du système est un résultat classique qui repose principalement sur une intégration par parties (voir par exemple [Rau12] paragraphe 2.3).

La généralisation de ce résultat aux problèmes de Cauchy hyperboliques à multiplicité constante [BG07], et aux problèmes aux limites fortement bien posés [[Cha72]-[Shi72]], peut se faire en passant par l'étude des systèmes à coefficients variables. Ainsi, le principe de Holmgren permet de considérer un feuilletage du cône dans lequel on s'attend à ce que l'information se propage. Le point important de cette méthode est que le système à donnée initiale définie sur l'une des feuilles hérite des propriétés d'hyperbolicité et du caractère fortement bien posé du système initial.

C'est cette méthode que l'on généralise ici aux problèmes aux limites posés dans la classe  $WR$ . On montrera donc que la vitesse de propagation de l'information reste finie pour les problèmes aux limites posés dans la classe  $WR$ .

Cependant, en raison de l'absence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, on verra que l'information peut se propager plus rapidement que dans le cas du problème de Cauchy, ou de façon équivalente dans le cas du problème aux limites fortement bien posé. Cette augmentation de la vitesse maximale de propagation par rapport au problème de Cauchy est provoquée par un phénomène de propagation le long du bord propre aux problèmes dans la classe  $WR$ .

Cette augmentation de la vitesse maximale n'est pas étonnante. En effet, la littérature regorge (voir par exemple [BG07]-[CG10]-[Ika70]) d'exemples pour lesquels la vitesse de propagation le long

du bord est supérieure à la vitesse à l'intérieur du domaine (qui reste la même vitesse que celle pour le problème de Cauchy). Pour certains de ces exemples, on peut même produire des vitesses de propagation le long du bord arbitrairement grandes.

Le premier paragraphe de ce chapitre est constitué de rappels et fixe les notations. Dans le second paragraphe, on énoncera le théorème principal et on débutera la démonstration de ce théorème jusqu'à l'apparition du lemme au coeur de ce travail. La démonstration de ce lemme, qui occupera le troisième paragraphe de ce chapitre, montrera qu'afin d'appliquer le principe de Holmgren, la vitesse de propagation doit pouvoir être supérieure à la vitesse de propagation du problème de Cauchy. Enfin dans le quatrième paragraphe, on achèvera la démonstration du théorème de vitesse finie de propagation et on discutera de l'optimalité de la vitesse maximale que l'on a trouvée dans le cinquième et dernier paragraphe.

### 3.2 Notations et résultats préliminaires.

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse aux problèmes aux limites posés dans le demi-espace :

$$\mathbb{R}_+^d := \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}.$$

Pour  $T > 0$  fixé, on désigne par  $\Omega_T$  l'ensemble défini par

$$\Omega_T = [0, T] \times \mathbb{R}_+^d,$$

et par  $\partial\Omega_T$  sa frontière spatiale *i.e.* l'ensemble défini par la relation

$$\partial\Omega_T = \Omega_T \cap \{x_d = 0\}.$$

Pour alléger les notations, on adopte l'abus de notation suivant :  $(t, x') := (t, x', 0)$ , pour les éléments de  $\partial\Omega_T$ .

Soit  $\mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant  $p$  lignes et  $q$  colonnes ; on note  $\mathcal{C}_b^\infty(\Omega_T, \mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R}))$  (resp.  $\mathcal{C}_b^\infty(\partial\Omega_T, \mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R}))$ ) l'ensemble des applications à valeurs dans  $\mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$  de régularité  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega_T$  (resp.  $\partial\Omega_T$ ), bornées ainsi que leurs dérivées successives et qui admettent de plus des limites pour  $x$  grand.

Enfin puisque ces espaces apparaissent de façon naturelle dans les estimations d'énergie, pour  $\gamma > 0$  on désignera par  $H_\gamma^s(\Omega_T)$  les espaces de Sobolev à poids exponentiel, définis par la relation :

$$H_\gamma^s(\Omega_T) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega_T) \mid e^{-t\gamma}u \in H^s(\Omega_T)\}.$$

Les espaces  $H_\gamma^s(\partial\Omega_T)$  sont définis de façon analogue.

On considère le problème aux limites hyperbolique linéaire à coefficients variables suivant :

$$\begin{cases} L(t, x, \partial)u := \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(t, x) \partial_j u = f, & \text{sur } \Omega_T, \\ B(t, x')u = g, & \text{sur } \partial\Omega_T, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{sur } \mathbb{R}_+^d, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $A_j \in \mathcal{C}_b^\infty(\Omega_T, \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}))$  et  $B \in \mathcal{C}_b^\infty(\partial\Omega_T, \mathcal{M}_{p \times N}(\mathbb{R}))$ , l'entier  $p$  étant le nombre de valeurs propres strictement positives de la matrice  $A_d(t, x)$  (on insiste ici sur le fait qu'en raison des hypothèses 3.2.1 et 3.2.2 ci-dessous, l'entier  $p$  sera indépendant du couple  $(t, x)$ ).

Dans un souci d'allègement des notations, pour  $\xi \in \mathbb{R}^d$  (resp.  $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ ), on désignera par  $A(t, x, \xi)$  (resp.  $A'(t, x, \xi')$ ) le symbole spatial (resp. spatial tangentiel) de  $L(t, x, \partial)$  i.e.

$$A(t, x, \xi) := \sum_{j=1}^d \xi_j A_j(t, x) \quad \left( \text{resp. } A'(t, x, \xi') := \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j A_j(t, x) \right).$$

Dans la suite de ce chapitre on supposera que le problème aux limites standard (3.1) est hyperbolique à multiplicité constante, à bord non caractéristique. C'est-à-dire que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

**Hypothèse 3.2.1** *Il existe un entier  $M \geq 1$ , des fonctions analytiques sur  $\Omega_T \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  à valeurs réelles, notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ , ainsi que des entiers positifs  $\nu_1, \dots, \nu_M$  tels que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \det(\tau + A(t, x, \xi)) = \prod_{k=1}^M (\tau + \lambda_k(t, x, \xi))^{\nu_k},$$

avec  $\lambda_1 < \dots < \lambda_q$  et les valeurs propres  $\lambda_k(t, x, \xi)$  de  $A(t, x, \xi)$  sont semi-simples.

**Hypothèse 3.2.2** *Pour tout  $(t, x) \in \Omega_T$ ,  $\det(A_d(t, x)) \neq 0$ .*

De plus, pour  $u$  une solution du problème aux limites (3.1), afin d'avoir une estimation de semi-groupe sur  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}$  dans l'estimation d'énergie de  $u$ , on a besoin d'ajouter l'hypothèse suivante sur les coefficients  $A_j$  (voir [Cou05]) :

**Hypothèse 3.2.3** *Le problème aux limites standard (3.1) est symétrisable au sens de Friedrichs, c'est-à-dire qu'il existe une matrice symétrique définie positive, régulière sur  $\Omega_T$ , notée  $S(t, x)$ , telle que pour tout  $1 \leq j \leq d$  et pour tout  $(t, x) \in \Omega_T$ , la matrice  $S(t, x)A_j(t, x)$  est symétrique.*

La suite de ce paragraphe est consacrée à l'étude de la condition de stabilité que l'on impose sur le bord. Comme mentionné dans l'introduction, on supposera que le problème aux limites (3.1) est dans la classe  $WR$ . Avant de donner une définition de cette classe (voir hypothèse 3.2.3 et [BGRSZ02]), on introduit quelles notations.

Soit  $\Xi$  et  $\Xi_0$  les espaces de fréquences :

$$\begin{aligned} \Xi &:= \left\{ \zeta = (\sigma := \gamma + i\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} \setminus \gamma \geq 0 \right\} \setminus \{0\}, \\ \Xi_0 &:= \Xi \cap \{\gamma = 0\}. \end{aligned}$$

Pour  $(t, x, \zeta) \in \Omega_T \times \Xi$ , on note  $\mathcal{A}(t, x, \zeta)$  la matrice résolvante associée au problème aux limites (3.1) définie de la façon suivante :

$$\mathcal{A}(t, x, \zeta) = -A_d(t, x)^{-1} (\sigma + iA'(t, x, \eta)).$$

On note  $E_-(t, x, \zeta)$  le sous-espace stable associé à  $\mathcal{A}(t, x, \zeta)$ . On rappelle que grâce au lemme de Hersh ([BG07] p.103), ce sous-espace est de dimension constante égale à  $p$  pour tout  $(t, x, \zeta) \in \Omega_T \times (\Xi \setminus \Xi_0)$ . De plus, les travaux de [Kre70] et de [Mét00] montrent que ce sous-espace admet un prolongement par continuité à  $\Xi_0$ .

Puisque cela permet de donner une caractérisation plus aisée de la classe  $WR$  on introduit  $\Delta$  un déterminant de Lopatinskii pour le problème aux limites (3.1) défini par la relation :

$$\Delta(t, x', \zeta) := \det(B(t, x') [E_1, \dots, E_p] (t, x', \zeta)),$$

où la famille  $\{E_1(t, x', \zeta), \dots, E_p(t, x', \zeta)\}$  est une base du sous-espace stable  $E_-(t, x', \zeta)$  (on renvoie à l'hypothèse 3.2.3 pour plus de détails).

Le déterminant de Lopatinskii  $\Delta$  ainsi défini est holomorphe dans la variable  $\sigma$  et régulier dans la variable  $\eta$ , en dehors de la zone de glancing.

On rappelle que le caractère fortement bien posé du problème aux limites (3.1) est équivalent à la condition suivante :

**Définition 3.2.1** *On dit que le problème aux limites (3.1) vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme si et seulement si :*

$$\forall (t, x') \in \partial\Omega_T, \forall \zeta \in \Xi, \Delta(t, x', \zeta) \neq 0.$$

*L'ensemble des problèmes aux limites satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme constitue la classe  $SS$  (pour strongly stable).*

La classe  $WR$  est une classe plus faible qui comprend des problèmes faiblement bien posés (que l'on a déjà mentionnés au chapitre 2), c'est-à-dire des problèmes dont la solution est moins régulière que les termes sources (dans la classe  $WR$  la différence de régularité est d'une dérivée sur le bord et d'une dérivée à l'intérieur). Pour ces problèmes la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère sur certains points de  $\Xi_0$ . Plus précisément, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère à l'ordre un pour certains points de  $\Xi_0$  inclus dans la zone hyperbolique (voir [BGRSZ02] et les définitions suivantes pour plus de détails).

**Définition 3.2.2** *La zone hyperbolique de l'opérateur  $L(t, x, \partial)$ , notée  $\mathcal{H}$ , est l'ensemble des triplets  $(t, x', \zeta) \in \partial\Omega_T \times \Xi_0$  tels que la matrice  $\mathcal{A}(t, x', \zeta)$  est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.*

*On note  $\Upsilon$  l'ensemble des  $(t, x', \zeta) \in \partial\Omega_T \times \Xi_0$  tels que*

$$\ker B(t, x') \cap E_-(t, x', \zeta) \neq \{0\}.$$

*De façon équivalente,*

$$\Upsilon = \{(t, x', \zeta) \in (\partial\Omega_T \times \Xi_0) \setminus \Delta(t, x', \zeta) = 0\}.$$

**Définition 3.2.3** *On dit que le problème aux limites (3.1) est dans la classe  $WR$  si les conditions suivantes sont réalisées :*

*i) Le problème aux limites (3.1) vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii faible, c'est-à-dire :*

$$\forall (t, x', \zeta) \in \partial\Omega_T \times (\Xi \setminus \Xi_0), \Delta(t, x', \zeta) \neq 0.$$

*ii)  $\Upsilon \neq \emptyset$ , et  $\Upsilon \subset \mathring{\mathcal{H}}$  (où  $\mathring{\cdot}$  désigne l'intérieur de  $\cdot$ ).*

*iii) Pour tout  $(\underline{t}, \underline{x'}, \underline{\zeta}) \in \Upsilon$ ,  $\partial_\tau \Delta(\underline{t}, \underline{x'}, \underline{\zeta}) \neq 0$ .*

Puisque cela sera nécessaire pour établir la valeur exacte de la vitesse maximale de propagation on rappelle aussi une formulation équivalente de la définition 3.2.3 (voir [CG10])

**Proposition 3.2.1** *Le problème aux limites (3.1) est dans la classe  $WR$  si et seulement si les conditions i) et ii) de la définition 3.2.3 sont réalisées et si de plus, à la place de iii), la condition suivante est vérifiée :*

iii') Pour tout  $(t, x', \zeta) \in \Upsilon$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(t, x', \zeta)$  dans  $\partial\Omega_T \times \Xi$ , une base  $(E_1, \dots, E_p)(t, x', \zeta)$  de  $E_-(\zeta)$  régulière dans  $\mathcal{V}$ , une matrice inversible de taille  $p \times p$ ,  $P(t, x', \zeta)$ , régulière sur  $\mathcal{V}$  et enfin une fonction  $\Theta$  régulière sur  $\mathcal{V}$  à valeurs réelles tels que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\forall (t, x', \zeta) \in \mathcal{V}, B[E_1, \dots, E_p](t, x', \zeta) = P(t, x', \zeta) \text{diag}(\gamma + i\Theta(t, x', \zeta), 1, \dots, 1).$$

En particulier, prenant le déterminant de l'égalité précédente on peut trouver un déterminant de Lopatinskiï qui s'écrit sous la forme :

$$\forall (t, x', \zeta) \in \mathcal{V}, \Delta(t, x', \zeta) = (\gamma + i\Theta(t, x', \zeta)) \det P(t, x', \zeta).$$

De tels problèmes sont faiblement bien posés au sens du théorème suivant [Cou11a] :

**Théorème 3.2.1** *On suppose que le problème aux limites standard (3.1) homogène pour la condition initiale vérifie les hypothèses 3.2.1-3.2.2-3.2.3 et est dans la classe  $WR$  au sens de la définition 3.2.3. On impose de plus la régularité suivante sur les coefficients du système (3.1) : pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,  $A_j \in W^{2,\infty}(\Omega_T, \mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R}))$  et  $B \in W^{2,\infty}(\partial\Omega_T, \mathbf{M}_{p \times N}(\mathbb{R}))$ . Alors pour tout terme source  $f \in L^2(\Omega_T)$  tel que  $\nabla_{t,x'} f \in L^2(\Omega_T)$ ,  $g \in H^1(\partial\Omega_T)$ , vérifiant la condition de compatibilité  $f|_{t=0} = g|_{t=0} = 0$ , il existe une unique fonction  $u \in L^2(\Omega_T)$ , à trace  $L^2(\partial\Omega_T)$ , qui est solution du problème aux limites (3.1). De plus,  $u$  admet l'estimation d'énergie :*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} e^{-2\gamma t} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \gamma \|u\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \\ & \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{\gamma^3} \|\nabla_{t,x'} f\|_{L^2_\gamma(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\nabla g\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_T)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

pour une certaine constante  $C > 0$  indépendante de  $\gamma$  et de  $T$  et pour tout  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ .

On considère maintenant le problème aux limites standard (3.1) avec condition initiale inhomogène

$$u|_{t=0} = h(x).$$

Alors le même résultat reste vrai, si, d'une part, on renforce la régularité des coefficients de (3.1) de la manière suivante : pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,  $A_j \in C_b^\infty(\Omega_T, \mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R}))$  et  $B \in C_b^\infty(\partial\Omega_T, \mathbf{M}_{p \times N}(\mathbb{R}))$ . Et d'autre part, on impose que la donnée initiale  $h \in H^2(\mathbb{R}_+^d)$  vérifie la condition de compatibilité :

$$B(0, x') h|_{x_d=0} = g|_{t=0}. \quad (3.3)$$

### 3.3 Théorème principal, énoncé et principe de Holmgren.

Le théorème principal de ce chapitre est le résultat d'unicité locale suivant :

**Théorème 3.3.1** *Si le problème aux limites standard (3.1) vérifie les hypothèses 3.2.1-3.2.2-3.2.3 et est dans la classe  $WR$ , alors il existe un réel strictement positif  $V_0$  tel que pour tout  $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ , si on désigne par  $\mathcal{C}$  le cône défini comme suit :*

$$\mathcal{C} = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus |x - x_0| \leq V_0(t_0 - t) \right\},$$

alors la propriété suivante est vérifiée :

Si  $u$  est une solution de régularité  $\mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}_+^d))$  du problème aux limites :

$$\begin{cases} L(t, x, \partial)u = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \Omega_T, \\ B(t, x')u = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \partial\Omega_T, \\ u = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \Omega_T \cap \{t = 0\}, \end{cases} \quad (3.4)$$

alors  $u|_{\mathcal{C}} \equiv 0$ .

De plus, la même propriété est vraie pour tout  $V \geq V_0$ .

Le plus petit des réels  $V_0$  tel que le théorème 3.3.1 soit vérifié est alors la vitesse de propagation maximale recherchée. La valeur de cette vitesse maximale de propagation sera rendue explicite dans la démonstration du lemme 3.4.1 (plus précisément, à l'équation (3.7)), comme on le verra, cette valeur ne dépend que des coefficients du problème (3.1).

Comme pour la démonstration de la vitesse finie de propagation pour le problème de Cauchy hyperbolique à multiplicité constante ([BG07], chapitre 2), ou pour la démonstration de la vitesse finie de propagation pour un problème aux limites vérifiant la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme [[Cha72]-[Shi72]], la démonstration que l'on propose ici repose sur un principe de Holmgren.

Dans un premier temps on choisit un  $V_0 > 0$  quelconque, et on va construire un feuilletage du cône  $\mathcal{C}$ . Ainsi pour toute feuille on relève l'espace  $\mathbb{R}_+^d$  en un paraboloïde approchant de mieux en mieux le cône  $\mathcal{C}$ . On va ensuite définir une famille de problèmes aux limites standards relevés, c'est-à-dire, pour lesquels la condition initiale n'est plus imposée sur l'hypersurface  $\Omega_T \times \{t = 0\}$ , mais sur l'une des feuilles du feuilletage.

Puis on va montrer, grâce au théorème 3.4.1 ci-dessous, que le problème ainsi relevé reste sous certaines restrictions sur  $V_0$  dans la classe  $WR$  et conserve aussi les propriétés de bord non caractéristique et d'hyperbolicité à multiplicité constante (cf. hypothèses 3.2.1 et 3.2.2). Considérant le problème aux limites dual du problème relevé qui, on le verra, reste dans la classe  $WR$  en vertu du lemme 3.5.1 et utilisant les résultats sur le caractère bien posé du problème aux limites dans la classe  $WR$  dûs à [Cou05], on pourra par la formule de Green montrer que si la solution  $u$  est supposée régulière alors sa restriction à toute feuille est nulle.

Ainsi, considérant une fonction  $u$  suffisamment régulière, on montrera une version régulière du théorème 3.3.1. On conclura enfin par un processus de régularisation.

On commence donc par décrire le feuilletage du cône  $\mathcal{C}$ . Ce dernier est analogue (après restriction aux  $x_d \geq 0$ ) à celui décrit dans [[BG07] p.76]. Le feuilletage  $(\mathcal{E}_\theta)_{\theta \in [0,1]}$  du cône  $\mathcal{C}$  est donc donné par :

$$\forall \theta \in [0, 1], \mathcal{E}_\theta := \{(t, x) \in \mathcal{C} \setminus \theta^3 |x - x_0|^2 - V_0^2(t - \theta t_0)^2 + \theta^2 t_0^2 V_0^2(1 - \theta) = 0\}.$$

Ce feuilletage dépend du réel  $V_0$  que l'on a fixé mais dans un souci de simplification des notations on ne note pas la dépendance de  $(\mathcal{E}_\theta)_{\theta \in [0,1]}$  par rapport à  $V_0$ .

On illustre le feuilletage précédent par le schéma suivant :

A  $\theta$  fixé,  $\mathcal{E}_\theta$  étant un graphe régulier on peut trouver un difféomorphisme :

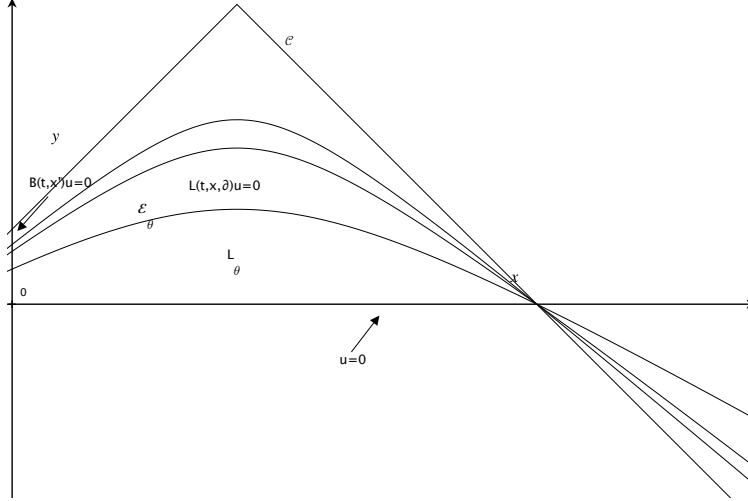
$$\psi_\theta : (t, x) \rightarrow (\tilde{t}, x),$$

tel que  $\mathcal{E}_\theta = \psi_\theta(\{0\} \times \mathbb{R}_+^d)$ . Par exemple, poser

$$\tilde{t} = \tilde{t}(x) := \theta \left( t_0 - \sqrt{(1 - \theta)t_0^2 + \frac{\theta}{V_0^2}|x - x_0|^2} \right),$$

convient. Ainsi considérer le problème relevé en espace sur la feuille  $\mathcal{E}_\theta$  revient à effectuer le changement de variables  $(t, x) \rightarrow \psi_\theta(t, x)$  dans le système (3.4). Le problème relevé en espace s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{L}(\tilde{t}, x, \partial)u = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \Omega_T, \\ \tilde{B}(\tilde{t}, x')u|_{x_d=0} = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \partial\Omega_T, \\ u = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \partial\Omega_T \cap \mathcal{E}_\theta, \end{cases} \quad (3.5)$$

Figure 3.1: Illustration du feuilletage  $(\mathcal{E}_\theta)_{\theta \in [0,1]}$ .

où l'on a posé<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\tilde{t}, x, \partial) &:= (I + A(t, x, \nabla_x \tilde{t})) \partial_{\tilde{t}} + \sum_{j=1}^d A_j(t, x) \partial_j, \\ \tilde{B}(\tilde{t}, x') &:= B(t, x'). \end{aligned}$$

Dans la suite de cette démonstration on travaillera sur le problème aux limites (3.5). Ainsi on introduit la matrice résolvante du problème (3.5) notée  $\tilde{\mathcal{A}}$  et définie par :

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{t}, x, \zeta) := - (A_d(t, x))^{-1} \left( \sigma(I + A(t, x, \nabla_x \tilde{t})) + iA'(t, x, \eta) \right). \quad (3.6)$$

On note aussi  $\tilde{E}_-(\tilde{t}, x, \zeta)$  le sous-espace stable associé à la matrice  $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{t}, x, \zeta)$ .

**Remarque** A ce stade de l'analyse, il n'est pas clair que le sous-espace stable  $\tilde{E}_-(\tilde{t}, x, \zeta)$  soit effectivement bien défini pour tout  $\zeta \in \Xi$ . En effet, sans l'hypothèse d'hyperbolicité à multiplicité constante pour le problème (3.5) le sous-espace stable  $\tilde{E}_-(\tilde{t}, x, \zeta)$  n'est a priori pas défini. Cependant comme on le verra au lemme 3.4.2 cette condition est vérifiée. C'est pourquoi, on se permet de définir ce sous-espace directement.

Enfin on désigne par  $\tilde{\mathcal{H}}$  la zone hyperbolique et  $\tilde{\Upsilon}$  la zone où la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est violée, pour le problème aux limites standard relevé (3.5). Ces deux zones sont définies exactement comme on l'a fait pour le problème aux limites (3.4) (cf. définition 3.2.2 et la définition 3.2.3).

Le prochain point de la démonstration est de montrer que le système (3.5) reste dans la classe  $WR$ , à condition que  $|\nabla_x \tilde{t}|$  soit assez petit.

<sup>1</sup> Puisque l'on ne fait un changement de variable qu'en temps (en raison du fait que l'hypersurface  $\mathcal{E}_\theta$  est un graphe régulier au dessus de l'hyperplan  $\{0\} \times \mathbb{R}_+^d$ ) il est normal que la partie liée aux dérivées spatiales soit inchangée.



### 3.4 Démonstration du lemme principal.

On note  $V_C$  la vitesse de propagation du problème de Cauchy (3.1) sans condition de bord,  $V_B$  la vitesse de propagation le long du bord *i.e.*

$$\begin{aligned} V_C &:= \sup_{(t,x,\xi) \in \Omega_T \times \mathbb{S}^{d-1}} \max_{1 \leq i \leq M} |\lambda_i(t, x, \xi)|, \\ V_B &:= \sup_{(t,x',\zeta) \in \Upsilon} |\nabla_\eta \Theta(\zeta)|, \end{aligned}$$

où les valeurs propres  $\lambda_i(t, x, \xi)$  sont définies dans l'hypothèse 3.2.1 et où la fonction  $\Theta$  est définie dans la proposition 3.2.1. On introduit aussi :

$$V := \max(V_B; V_C). \quad (3.7)$$

On pose enfin  $\mathcal{C}_{res}$  le cône défini par :

$$\mathcal{C}_{res} = \left\{ (r, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1} \mid |v| < V^{-1}r \right\}.$$

Par définition de  $V$  on voit que ce cône est inclus dans le cône forward.

Le point principal de cette étude est le suivant :

**Lemme 3.4.1** *Pour tout  $(1, \nabla_x \tilde{t}) \in \mathcal{C}_{res}$  le problème aux limites (3.5), associé au changement de variable  $(1, \nabla_x \tilde{t})$  est faiblement bien posé dans la classe  $WR$ .*

On décompose la démonstration de ce résultat en deux lemmes. Le premier montre que les hypothèses 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 sont satisfaites par le problème aux limites (3.5), le second étant consacré au fait que le problème aux limites (3.5) reste effectivement dans la classe  $WR$ , au sens de la définition 3.2.3.

**Lemme 3.4.2** *Pour tout  $(1, \nabla_x \tilde{t}) \in \mathcal{C}_{res}$ , le problème aux limites (3.5) satisfait les hypothèses 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. De plus, le problème aux limites (3.5) satisfait aussi les conditions suivantes :*

*i)  $\tilde{B}$  est une matrice de taille  $\tilde{p} \times N$  où  $\tilde{p}$  est le nombre de valeurs propres strictement positives de  $\tilde{A}_d$ .*

*ii) Pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,  $\tilde{A}_j \in \mathcal{C}_b^\infty(\tilde{\Omega}_T, \mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R}))$  et  $\tilde{B} \in \mathcal{C}_b^\infty(\partial \tilde{\Omega}_T, \mathbf{M}_{\tilde{p} \times N}(\mathbb{R}))$ .*

**Démonstration :** Le fait que le problème aux limites (3.5) vérifie l'hypothèse 3.2.2 et la condition *i)* est trivial et est juste une conséquence du fait que le changement de variable  $(t, x) \rightarrow (\tilde{t}, x)$  ne change pas les matrices  $A_d$  et  $B$ .

De même pour vérifier *ii)* il suffit de vérifier que  $I + A(t, x, \nabla_x \tilde{t})$  est dans  $\mathcal{C}_b^\infty(\Omega_T, \mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R}))$ , ce qui est le cas puisque par hypothèse sur les coefficients du problème aux limites (3.1),  $A(t, x, \nabla_x \tilde{t})$  est dans  $\mathcal{C}_b^\infty(\Omega_T, \mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R}))$ .

La démonstration du fait que le problème aux limites (3.5) vérifie l'hypothèse 3.2.1 est une application directe du lemme de Lax qui affirme que l'hyperbolicité à multiplicité constante est conservée sous l'hypothèse  $|\nabla_x \tilde{t}| < \frac{1}{V_C}$  (cf. [BG07] chapitre 1, théorème 1.5).

□

**Lemme 3.4.3** *Pour tout  $(1, \nabla_x \tilde{t})$  dans  $\mathcal{C}_{res}$ , le problème aux limites (3.5) est dans la classe  $WR$ .*

**Démonstration :** On raisonne par connexité, soit :

$$\Lambda := \left\{ (1, \nabla_x \tilde{t}) \in \mathcal{C}_{res} \setminus \left( \tilde{L}(\tilde{t}, x, \partial), \tilde{B}(\tilde{t}, x') \right) \text{ est dans la classe } WR \right\}. \quad (3.8)$$

- Il est clair que l'ensemble  $\Lambda$  est non vide, car  $(1, 0) \in \Lambda$ .
- Le théorème principal de [BGRSZ02] établit que la classe  $WR$  est stable par perturbations, donc  $\Lambda$  est ouvert dans  $\mathcal{C}_{res}$ .

- Il faut juste montrer que l'ensemble  $\Lambda$  est fermé dans  $\mathcal{C}_{res}$ .

Soit  $(1, v_n)$  une suite dans  $\Lambda$  qui converge vers  $(1, v)$  dans  $\mathcal{C}_{res}$ . On désigne par  $\tilde{E}_-^n(t, x, \zeta)$  (resp.  $\tilde{E}_-^\infty(t, x, \zeta)$ ) le sous-espace stable pour la matrice résolvante obtenue après le changement de variables  $(1, v_n)$  (resp.  $(1, v)$ ). On note aussi  $\tilde{\Delta}^n$  et  $\tilde{\Delta}^\infty$  les déterminants de Lopatinskii correspondants.

On veut montrer que pour tout  $(t, x') \in \partial\Omega_T$ , les conditions *i) – iii)* de la définition 3.2.3 sont satisfaites.

◊ Démonstration de i) :

On raisonne par l'absurde. Soit  $(\tilde{t}, x', \zeta) \in \partial\Omega_T \times (\Xi \setminus \Xi_0)$  un zéro du déterminant de Lopatinskii  $\tilde{\Delta}^\infty$ .  $\tilde{\Delta}^\infty$  étant une fonction holomorphe dans la variable  $\sigma$ , si  $\tilde{\Delta}^\infty$  n'est pas identiquement nulle alors ses zéros sont isolés. On va montrer que  $\tilde{\Delta}^\infty(\tilde{t}, x', 1, 0) \neq 0$ .

Un simple calcul montre que :

$$i\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{t}, x', 1, 0) = \mathcal{A}(\tilde{t}, x', i, \nabla_{x'} \tilde{t}) - i\partial_d \tilde{t}.$$

Par conséquent,  $v$  est un vecteur propre réel de la matrice  $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{t}, x', 1, 0)$  pour une valeur propre réelle  $\kappa$  si et seulement si  $v$  est un vecteur propre réel de la matrice  $\mathcal{A}(\tilde{t}, x', i, \nabla_{x'} \tilde{t})$  pour la valeur propre imaginaire pure  $i(\kappa + \partial_d \tilde{t})$ . Ainsi,  $\tilde{E}_-^\infty(\tilde{t}, x', 1, 0) \cap \ker \tilde{B}(\tilde{t}, x') \neq \{0\}$  si et seulement si  $(\tilde{t}, x', 1, \nabla_{x'} \tilde{t}) \in \Upsilon$ .

Or,  $(1, \nabla_x \tilde{t}) \in \mathcal{C}_{res}$ , ce qui implique que :

$$|\nabla_{x'} \tilde{t}| \leq |\nabla_x \tilde{t}| < \frac{1}{V_B} \leq \inf_{(\tilde{t}, x', 1, \eta) \in \Upsilon} |\eta|. \quad (3.9)$$

La dernière inégalité provenant de la formule d'Euler appliquée à la fonction homogène  $\Theta$  évaluée en un point  $(\tilde{t}, x', \zeta) \in \Upsilon$ . Cette formule s'écrit sous la forme :

$$\eta \cdot \nabla_\eta \Theta(\tilde{t}, x', \zeta) = -\tau \partial_\tau \Theta(\tilde{t}, x', \zeta),$$

où l'on peut normaliser la fonction  $\Theta$  de manière à ce que  $\partial_\tau \Theta(\tilde{t}, x', \zeta) = 1$  (cf. [CG10] démonstration de la proposition 3.5) et où l'on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\frac{1}{V_B} \leq \inf_{(\tilde{t}, x', 1, \eta) \in \Upsilon} |\eta|.$$

Or l'inégalité (3.9) contredit le fait que  $(\tilde{t}, x', 1, \nabla_{x'} \tilde{t}) \in \Upsilon$ . Par conséquent,  $\tilde{\Delta}^\infty(\tilde{t}, x', 1, 0) \neq 0$  et  $(\tilde{t}, x', \zeta)$  est un zéro isolé.

Appliquant le théorème de Rouché, pour  $n$  assez grand  $\tilde{\Delta}^n$  admet un zéro au voisinage de  $(\tilde{t}, x', \zeta)$ , ce qui contredit clairement le fait que la suite  $(1, v_n)$  est dans  $\Lambda$  et le point *i)* est démontré.

◊ Démonstration de ii) :

Les démonstrations des points *ii)* et *iii)* étant vraies pour tout  $n$ , on se permet d'ôter la dépendance par rapport à  $n$  dans la notation des objets manipulés.

La démonstration du point *ii*) se base sur le calcul explicite :

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{t}, x, i\tau, \eta) = \mathcal{A}(t, x, i\tau, \eta + \tau \nabla_{x'} \tilde{t}) - i\tau \partial_d \tilde{t} \quad (3.10)$$

qui montre que la zone hyperbolique (resp. la zone d'annulation du déterminant de Lopatinskii) pour la matrice résolvante  $\tilde{\mathcal{A}}$ , notée  $\tilde{\mathcal{H}}$  (resp.  $\tilde{\Upsilon}$ ), est la translation de la zone  $\mathcal{H}$  (resp.  $\Upsilon$ ) par le vecteur  $\tau \nabla_{x'} \tilde{t}$ . Par conséquent, si  $\Upsilon \subset \overset{\circ}{\mathcal{H}}$ , alors  $\tilde{\Upsilon} \subset \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{H}}}$ .

◇ Démonstration de *iii*) :

La démonstration du point *iii*) se fait par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un élément  $(\tilde{t}, x', \underline{\zeta}) \in \tilde{\Upsilon}$  tel que  $\partial_\tau \tilde{\Delta}(\tilde{t}, x', \underline{\zeta})$  est nul. On part de l'identité (3.10), qui en terme de déterminants de Lopatinskii s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\Delta}(\tilde{t}, x', i\tau, \eta) = \Delta(t, x', i\tau, \eta + \tau \nabla_{x'} \tilde{t}),$$

équation que l'on dérive par rapport à la variable  $\tau$ , et évaluant en  $(\tilde{t}, x', \underline{\zeta})$  on obtient :

$$0 = \partial_\tau \tilde{\Delta}(\tilde{t}, x', \underline{\zeta}) = [i\partial_\tau \Delta + \nabla_{x'} \tilde{t} \cdot \nabla_\eta \Delta](t, x', i\tau, \eta + \tau \nabla_{x'} \tilde{t}). \quad (3.11)$$

Or, réitérant les mêmes arguments que dans [[CG10], proposition 3.5], on peut écrire :

$$\nabla_\eta \Delta(t, x', i\tau, \eta + \tau \nabla_{x'} \tilde{t}) = i [\partial_\tau \Delta \nabla_\eta \Theta](t, x', i\tau, \eta + \tau \nabla_{x'} \tilde{t}).$$

Utilisant le fait que par hypothèse  $\partial_\tau \Delta(t, x', i\tau, \eta + \tau \nabla_{x'} \tilde{t}) \neq 0$ , l'égalité (3.11) devient :

$$\nabla_{x'} \tilde{t} \cdot \nabla_\eta \Theta(t, x', i\tau, \eta + \tau \nabla_{x'} \tilde{t}) = -1.$$

En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors que

$$|\nabla_{x'} \tilde{t}| \geq |\nabla_{x'} \tilde{t}| \geq \frac{1}{V_B},$$

ce qui est exclus car le couple  $(1, \nabla_{x'} \tilde{t})$  appartient à  $\mathcal{C}_{res}$ .

Donc l'ensemble  $\Lambda$  défini en (3.8) vérifie, par un argument de connexité,  $\Lambda = \mathcal{C}_{res}$ , ce qui conclut la démonstration du lemme 3.4.3.

□

## 3.5 Fin de la démonstration du théorème 3.3.1.

### 3.5.1 Le cas régulier, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega_T)$ .

Grâce au lemme 3.4.1 on sait que pour tout changement de variable  $(1, \nabla_{x'} \tilde{t})$  avec  $|\nabla_{x'} \tilde{t}| < \frac{1}{V}$ , le problème aux limites (3.5) est dans la classe  $WR$  et que ce dernier vérifie les hypothèses du théorème 3.2.1.

On veut maintenant travailler sur le problème adjoint du problème aux limites (3.5) :

$$\begin{cases} L^*(t, x, \partial)v = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \Omega_T, \\ C(t, x')v = 0, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \partial\Omega_T, \\ v = h, & \text{sur } \mathcal{C} \cap \Omega_T \cap \mathcal{E}_\theta, \end{cases} \quad (3.12)$$

où l'opérateur adjoint  $L^*(t, x, \partial)$  est donné par

$$L^*(t, x, \partial) = -\partial_t - \sum_{j=1}^d A_j(t, x)^t \partial_j - \sum_{j=1}^d \partial_j A_j(t, x)^t,$$

et où la condition de bord  $C(t, x')$  est choisie de manière à vérifier la décomposition suivante de la matrice normale :

$$A_d(t, x') = C(t, x')^* M(t, x') + N(t, x')^* B(t, x'), \quad (3.13)$$

pour deux matrices  $M \in \mathcal{C}_b^\infty(\partial\Omega_T, \mathbf{M}_{N-p \times N}(\mathbb{R}))$  et  $N \in \mathcal{C}_b^\infty(\partial\Omega_T, \mathbf{M}_{p \times N}(\mathbb{R}))$ .

C'est un résultat classique [[BG07] p.29] que le problème adjoint (3.12) satisfait les hypothèses 3.2.1-3.2.2 et 3.2.3 à condition que le problème "primal" (3.5) les satisfasse. Il reste donc à montrer que le problème adjoint (3.12) est dans la classe  $WR$  à condition que le problème (3.5) soit dans la classe  $WR$ . C'est une conséquence immédiate du lemme suivant [[BG07], chapitre 8].

**Lemme 3.5.1** *Pour tout  $\zeta$  en dehors de la zone de glancing du problème (3.5),  $E_-^*$  le sous-espace stable du problème adjoint (3.12) est bien défini en  $(-\bar{\sigma}, -\eta)$ , et la fonction :*

$$\Delta^* : \zeta \longmapsto \overline{\Delta(-\bar{\sigma}, -\eta)}, \quad (3.14)$$

*est un déterminant de Lopatinskiï pour le problème adjoint (3.12).*

D'après le théorème 3.2.1, le problème adjoint (3.12) admet une unique solution qui subie une perte d'une dérivée tangentielle. On a donc tous les ingrédients pour conclure par un argument d'intégration. En effet, soit  $u$  la solution régulière du problème aux limites (3.4) et  $v$  la solution du problème aux limites (3.12) donnée par le théorème 3.2.1 (appliqué aux données initiales non nulles,  $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{E}_\theta)$ )<sup>2</sup>. On définit  $\mathcal{L}_\theta$  l'espace entre  $\mathcal{E}_\theta$  et  $\{t=0\}$ , alors par dualité :

$$\int_{\mathcal{L}_\theta} \langle L(t, x, \partial)u, v \rangle - \langle u, L^*(t, x, \partial)v \rangle dt dx = 0,$$

appliquant la formule de Green on en déduit que :

$$0 = - \int_{\mathcal{L}_\theta \cap \{t=0\}} \langle u, v \rangle dx - \int_{\mathcal{L}_\theta \cap \{x_d=0\}} \langle A_d(t, x')u, v \rangle dt dx' + \int_{\mathcal{E}_\theta} \left\langle \left( \nu_0^\theta + A(t, x, \vec{n}^\theta) \right) u, v \right\rangle dt dx \quad (3.15)$$

où  $\nu^\theta := (\nu_0^\theta, \vec{n}^\theta)$  est la normale unitaire extérieure à  $\mathcal{E}_\theta$ .

Par hypothèse  $u|_{t=0}$  est nul donc la première intégrale est nulle. Par définition du problème adjoint, on peut décomposer la seconde de la façon suivante (cf. (3.13)) :

$$\int_{\mathcal{L}_\theta \cap \{x_d=0\}} \langle A_d(t, x')u, v \rangle dt dx' = \int_{\mathcal{L}_\theta \cap \{x_d=0\}} \langle B(t, x')u, M(t, x')v \rangle + \langle N(t, x')u, C(t, x')v \rangle dt dx'.$$

Encore une fois puisque  $u$  est solution de (3.4) et que  $v$  est solution de (3.12) on a

$$B(t, x')u|_{x_d=0} = C(t, x')v|_{x_d=0} = 0.$$

Ainsi, l'intégrale précédente est nulle et l'équation (3.15) se réduit donc à :

$$\int_{\mathcal{E}_\theta} \left\langle \left( \nu_0^\theta + A(t, x, \vec{n}^\theta) \right) u, v \right\rangle dt dx = 0,$$

<sup>2</sup>Le choix d'une telle donnée initiale est fait pour vérifier la condition de compatibilité (3.3) du théorème 3.2.1. Appliquée au système 3.12, elle s'écrit

$$C|_{\mathcal{E}_\theta} h|_{x_d=0} = 0,$$

et est vérifiée indépendamment de  $C$  car  $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{E}_\theta)$

cependant comme  $v$  est solution de (3.12) sur  $\mathcal{E}_\theta$  on a l'égalité  $v = h$ . La donnée initiale  $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{E}_\theta)$  étant arbitraire sur  $\mathcal{E}_\theta$  cela implique que sur  $\mathcal{E}_\theta$  :

$$\left( \nu_0^\theta + A(t, x, \vec{n}^\theta) \right) u = 0.$$

D'après [BG07], la matrice  $(\nu_0^\theta + A(t, x, \vec{n}^\theta))$  est inversible. Donc pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,  $u|_{\mathcal{E}_\theta}$  est nulle.

La solution  $u$  étant supposée régulière et  $(\mathcal{E}_\theta)_{\theta \in [0, 1]}$  étant un feuilletage du cône  $\mathcal{C}$  défini au théorème 3.3.1, par continuité,  $u = 0$  sur  $\mathcal{C}$ . Ceci conclut la démonstration du théorème 3.3.1 dans le cas où la solution  $u$  est régulière.

### 3.5.2 Le cas $u \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}_+^d))$ .

On considère maintenant le cas où la solution  $u$  du problème aux limites (3.4) est un élément de  $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}_+^d))$ . On introduit  $\varphi_n$  une approximation de l'identité.

D'après le théorème 1.2 de [MS11], le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(t, x, \partial)u^n = (L(t, x, \partial)u) * \varphi_n, \\ B(t, x')u^n|_{x_d=0} = (B(t, x')u) * \varphi_n, \\ u^n|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

admet une unique solution  $u^n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_T)$ .

Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit une restriction du cône  $\mathcal{C}$ , notée  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , par la relation :

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \{(t, x) \in \Omega_T \mid |x - x_0| \leq V_0(t_0 - \varepsilon - t)\}.$$

Pour  $n$  assez grand, comme  $L(t, x, \partial)u$  est supposée nulle sur  $\mathcal{C}$ , on peut supposer que le terme source à l'intérieur  $(L(t, x, \partial)u) * \varphi_n$  est nul sur  $\mathcal{C}_\varepsilon$ . De la même manière, pour  $n$  assez grand, le terme source sur le bord  $(B(t, x')u) * \varphi_n$  est nul sur  $\mathcal{C}_\varepsilon \cap \{x_d = 0\}$ .

Par conséquent, d'après le théorème 3.3.1 appliqué aux solutions régulières,  $u^n$  est nulle sur  $\mathcal{C}_\varepsilon$  pour  $n$  assez grand. Mais par l'estimation d'énergie (3.2), l'écart

$$\begin{aligned} \|(u - u^n)(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 &\lesssim \frac{1}{\gamma} \|f * \varphi_n - f\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{\gamma^3} \|\nabla_{t, x'}(f * \varphi_n - f)\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)}^2 \\ &+ \|g * \varphi_n - g\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_T)}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\nabla(g * \varphi_n - g)\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_T)}^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé  $f := L(t, x, \partial)u$  et  $g := B(t, x')u$ . Par propriété de la convolution par une approximation de l'identité,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * \varphi_n - f\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)} = 0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|g * \varphi_n - g\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_T)} = 0.$$

Et la relation usuelle  $\partial(a * b) = (\partial a) * b$  montre que les normes des termes sous les gradients tendent aussi vers 0. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(u^n - u)(t, \cdot)\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^d)} = 0,$$

mais on a déjà mentionné que pour  $n$  assez grand  $u^n \equiv 0$  sur  $\mathcal{C}_\varepsilon$ . Par unicité de la limite,  $u = 0$  sur  $\mathcal{C}_\varepsilon$ . Enfin, passant à la limite pour  $\varepsilon$  tendant vers zéro, on obtient que  $u|_{\mathcal{C}} \equiv 0$ , ce qui conclut la démonstration du théorème 3.3.1 dans le cas non régulier.

□

### 3.6 Optimalité de la vitesse maximale de propagation.

On considère maintenant un problème aux limites de la forme (3.1) mais à coefficients constants cette fois, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u = f, \text{ sur } \Omega_T, \\ Bu|_{x_d=0} = g, \text{ sur } \partial\Omega_T, \\ u|_{t \leq 0} = 0, \text{ sur } \mathbb{R}_+^d, \end{cases} \quad (3.17)$$

avec  $A_j \in \mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathbf{M}_{p \times N}(\mathbb{R})$ , des matrices à coefficients constants. Les objets introduits dans le paragraphe 3.2, bien que ne dépendant plus des variables  $(t, x)$  garderont les mêmes notations dans la suite de ce paragraphe.

On rappelle le théorème suivant, dû à [CG10], qui donne une borne inférieure à la vitesse maximale de propagation d'un problème aux limites à coefficients constants lorsque ce dernier est dans la classe  $WR$ .

**Théorème 3.6.1** *On suppose qu'il existe  $V > 0$  tel que la propriété suivante soit vérifiée : si pour tout  $R_1, R_2 \geq 0$ , pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}_+^d$  et pour tout  $x'_0 \in \mathbb{R}^{d-1}$ , si les termes sources  $f$  et  $g$  sont à support compact :*

$$\begin{aligned} \text{supp } f &\subset \{(t, x) \in \bar{\Omega}_T \setminus t \geq 0, |x - x_0| \leq R_1\}, \\ \text{supp } g &\subset \{(t, x') \in \partial\Omega_T \setminus t \geq 0, |x' - x'_0| \leq R_2\}, \end{aligned}$$

alors la solution  $u \in L^2(\Omega_T)$  du problème aux limites (3.1) satisfait :

$$\begin{aligned} \text{supp } u &\subset \{(t, x) \in \bar{\Omega}_T \setminus t \geq 0, |x - x_0| \leq R_1 + Vt\} \\ &\cup \{(t, x) \in \bar{\Omega}_T \setminus t \geq 0, |x - (x'_0, 0)| \leq R_2 + Vt\}. \end{aligned}$$

Alors on a la minoration suivante sur  $V$  :

$$V \geq \max(V_{Cauchy}, V_{Bord}),$$

avec  $V_{Cauchy} = \max_{\xi \in \mathbb{S}^{d-1}} \max_j |\lambda_j(\xi)|$  et  $V_{Bord} = \max_{\zeta \in \Upsilon} |\nabla_\eta \Theta(\zeta)|$ .

Par conséquent, si on "gèle" les coefficients dans le problème aux limites (3.1), on obtient un problème aux limites à coefficients constants. Appliquant le théorème 3.3.1 qui établit l'existence d'une vitesse maximale de propagation et en donne une borne supérieure et le théorème 3.6.1, on obtient alors que pour les problèmes aux limites à coefficients constants la vitesse maximale de propagation donnée par

$$V_0 = \max(V_{Cauchy}, V_{Bord}),$$

est optimale.

On renvoie à [CG10] et [Cha72] pour une étude de l'équation des ondes dans laquelle la vitesse de propagation  $V_{Bord}$  est arbitrairement grande. En particulier, la vitesse maximale de propagation de l'équation des ondes peut-être arbitrairement grande. Elle peut être notamment supérieure à la vitesse de propagation du problème de Cauchy  $V_{Cauchy}$ .



## Chapitre 4

# Problème à coin et conditions de bord strictement dissipatives.

Par problème à coin, on entend avant tout la donnée d'un opérateur hyperbolique. Cependant, ce dernier ne se retrouve plus posé dans un demi-espace comme cela était le cas dans les chapitres précédents, mais dans un quart d'espace. Ainsi, il faut, pour résoudre ce problème, ajouter une condition de bord sur la seconde face du domaine. Dans ce chapitre, on s'intéresse à des problèmes à coin globaux en temps. De tels problèmes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} L(\partial)u := \partial_t u + A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u + \sum_{j=3}^d A_j \partial_j u = f, & \text{sur } \Omega, \\ B_1 u|_{x_1=0} = g_1, & \text{sur } \partial\Omega_1, \\ B_2 u|_{x_2=0} = g_2, & \text{sur } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

où les coefficients  $A_j$  de l'opérateur hyperbolique  $L(\partial)$  sont des matrices de  $\mathbf{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ , les matrices des conditions de bord  $B_1$  et  $B_2$  sont respectivement dans  $\mathbf{M}_{p_1 \times N}(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{M}_{p_2 \times N}(\mathbb{R})$  (les valeurs des entiers  $p_1$  et  $p_2$  seront rendues explicites dans la définition 4.1.1), et où l'on a posé :

$$\Omega := \left\{ (t, x) = (t, x_1, x_2, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-2} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\partial\Omega_1 := \Omega \cap \{x_1 = 0\}, \text{ et } \partial\Omega_2 := \Omega \cap \{x_2 = 0\}. \quad (4.3)$$

### 4.1 Description du problème.

Le but de ce chapitre est de démontrer le caractère fortement bien posé d'une classe particulière de problèmes à coin. Plus précisément, on va démontrer le caractère fortement bien posé des problèmes à coin symétriques qui admettent des conditions de bord strictement dissipatives. Une étude du cas général, c'est-à-dire lorsque les conditions de bord vérifient seulement la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chacune des faces sera faite au chapitre 5.

L'une des raisons pour laquelle on a d'abord choisi de travailler dans cette classe de problèmes particulière est que comme on va le voir, la démonstration du caractère bien posé sera beaucoup plus simple que dans le cas général. On a donc trouvé que l'étude de ces problèmes particuliers était une bonne entrée en matière. De plus, le premier point de la démonstration du caractère fortement bien posé dans le cas général sera de se ramener à un terme source à l'intérieur nul en utilisant le caractère fortement bien posé des problèmes à coin symétriques à condition de bord strictement dissipatives. Ainsi, le cas général nécessite pour sa résolution l'étude du cas strictement dissipatif.

Toutefois, la classe des problèmes à coin symétriques à condition de bord strictement dissipatives est une classe intéressante à étudier en soi. En effet, d'une part, de nombreux opérateurs hyperboliques issus de la physique (par exemple, l'équation des ondes, l'équation d'Euler, l'équation de



Maxwell ...) sont des opérateurs symétriques. Et d'autre part, imposer des conditions de bords strictement dissipatives revient à demander que l'énergie soit dissipée lorsqu'un rayon est réfléchi sur le bord du domaine. Ainsi, de telles conditions ont un sens physique.

On peut aussi insister sur le fait que tout opérateur hyperbolique symétrique admet des conditions de bords strictement dissipatives. Donc pour un opérateur hyperbolique symétrique fixé, la classe des conditions de bord admissibles pour en faire un problème symétrique à conditions de bord strictement dissipatives n'est jamais vide.

Enfin, contrairement à la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, il est facile de déterminer les conditions de bord qui sont strictement dissipatives pour un opérateur hyperbolique symétrique fixé.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Après avoir énoncé les hypothèses sous lesquelles on démontrera le caractère fortement bien posé du problème (4.1), la démonstration se déroulera en trois temps.

Dans le premier, on établira une estimation d'énergie a priori pour le problème (4.1). Comme on le verra, le caractère strictement dissipatif des conditions de bord permettra d'établir cette estimation à moindre coût.

Puis, on démontrera l'existence d'une solution faible pour le problème (4.1) en utilisant des arguments d'analyse fonctionnelle et en introduisant un problème dual pour le problème (4.1). Le fait que le problème dual du problème (4.1) vérifie les propriétés nécessaires pour conclure sera aussi une conséquence du fait que le problème (4.1) se trouve dans la classe des problèmes symétriques à conditions de bord strictement dissipatives.

Enfin, l'unicité de la solution faible proviendra d'un lemme de type "fort=faible". On reprendra ici le résultat de [Sar62].

La démonstration que l'on propose ici diffère de celles de [HT14b] et [HT14a]. En effet dans ces deux articles, les auteurs se placent dans un rectangle et supposent que la matrice  $A_1^{-1}A_2$  n'a pas de bloc de Jordan. Ensuite ils construisent des conditions de bords particulières pour lesquelles ils montrent que le problème aux limites (4.1), homogène sur les bords de  $\Omega$  mais pour lequel la variable temporelle vit dans  $[0, +\infty[$  vérifie les hypothèses du théorème de Hille-Yosida. L'avantage d'utiliser le théorème de Hille-Yosida est alors que la solution s'exprime alors comme l'application d'un semi-groupe de contraction aux termes sources du problème.

D'un autre point de vue, dans [Hua0], l'auteur sous l'hypothèse selon laquelle  $A_1^{-1}A_2$  n'a que des valeurs propres réelles et aucun bloc de Jordan, utilise des techniques de régularisation elliptique sur l'équation stationnaire (et donc des techniques très proches des celles mises en oeuvre pour appliquer le théorème de Hille-Yosida). L'auteur montre alors l'existence d'une solution pour le problème à coin avec condition initiale non homogène pour toute les conditions de bord qui sont strictement dissipatives. Cependant, l'unicité de la solution n'est pas évidente en dehors du cas où les deux matrices  $A_1$  et  $A_2$  commutent.

La raison pour laquelle on a choisi de suivre un schéma de démonstration différent est que dans le cadre général pour lequel les conditions de bord ne sont plus strictement dissipatives, on ne peut plus appliquer le théorème de Hille-Yosida. De même, les techniques de régularisation elliptique ne semblent pas évidentes à adapter. C'est donc le schéma de preuve décrit dans ce chapitre que l'on utilisera. Ainsi décrire avec précision ce schéma de preuve nous a semblé être une bonne entrée en matière pour le chapitre suivant. De plus, comme dans [HT14a] et [Hua0] se placera aussi sous une hypothèse sur la matrice  $A_1^{-1}A_2$ , voir hypothèse 4.1.2, qui sera un peu plus faible que celles utilisées dans leurs articles.

### 4.1.1 Hypothèses et définitions.

Comme indiqué dans la description du problème, on se restreint ici à une classe particulière de problème à coin.

On commence par faire l'hypothèse, assez classique, suivante sur les coefficients de l'opérateur  $L(\partial)$  :

**Hypothèse 4.1.1** *Le problème à coin (4.1) est supposé symétrique, c'est-à-dire que les matrices  $A_j$  sont symétriques.*

*Le problème à coin (4.1) est supposé non caractéristique pour chacune des faces du domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire que les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont inversibles.*

On rappelle qu'un opérateur symétrique est hyperbolique. L'hypothèse de symétrie sur les coefficients de  $L(\partial)$  sera la seule hypothèse d'hyperbolicité que l'on utilisera dans ce chapitre.

On précise dans la définition suivante ce que l'on entend par strictement dissipatif pour une condition de bord.

**Définition 4.1.1** *Pour  $i = 1, 2$ , la matrice de bord  $B_i$  est qualifiée de strictement dissipative pour la face  $\partial\Omega_i$  du problème à coin 4.1 si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

- i)  $\forall u \in \ker B_i, u \neq 0, \langle A_i u, u \rangle < 0$ .*
- ii)  $\ker B_i$  est maximal (au sens de l'inclusion) pour la propriété i).*
- iii) La matrice  $B_i$  est surjective de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^{p_i}$  où  $p_i$  est le nombre de valeurs propres positives de  $A_i$ .*

On a mentionné dans l'introduction qu'un problème à coin symétrique admettait toujours des conditions de bords strictement dissipatives. En effet, pour un opérateur  $L(\partial)$  fixé, d'après l'hypothèse de symétrie des matrices  $A_j$ , l'opérateur  $L(\partial)$  est hyperbolique. En particulier, les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont diagonalisables à valeurs propres réelles. De plus, d'après l'hypothèse (4.1.1), la matrice  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) admet  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) valeurs propres positives et  $N - p_1$  (resp.  $N - p_2$ ) valeurs propres négatives.

On note  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) le sous-espace propre engendré par les  $N - p_1$  (resp.  $N - p_2$ ) vecteurs propres associés à une valeur propre négative. Alors pour tout  $v \in E_i$ , il est clair que

$$v \neq 0 \Rightarrow \langle A_i v, v \rangle < 0.$$

Il suffit alors de choisir deux matrices  $B_1$  et  $B_2$ , surjectives dans  $\mathbb{R}^{p_1}$  et  $\mathbb{R}^{p_2}$  telles que

$$\ker B_1 = E_1, \text{ et } \ker B_2 = E_2.$$

On rappelle aussi au passage que si la matrice  $B_i$  est strictement dissipative pour la face  $\partial\Omega_i$  alors elle vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (on renvoie à [BG07] paragraphe 4.3.4 pour une démonstration de ce résultat). Cependant, la réciproque de ce résultat n'est pas vraie comme le montre l'exemple du sous-paragraphe 2.5.3.

Dans la suite de ce chapitre, on utilisera aussi la formulation équivalente suivante de la stricte dissipativité :

**Proposition 4.1.1** *La matrice de bord  $B_i$  est strictement dissipative pour la face  $\partial\Omega_i$ , si et seulement si, il existe deux constantes  $c_i, C_i > 0$  telles que :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^N, \quad c_i |u|^2 + \langle A_i u, u \rangle \leq C_i |B_i u|^2.$$

**Démonstration :** Cette démonstration est tirée de [BG07] lemme 3.3.

On procède par l'absurde. Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| = 1$  et

$$|Bu_n|^2 < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \langle A_i u_n, u_n \rangle. \quad (4.4)$$

Par compacité de la sphère unité, on peut supposer que la suite  $u_n$  converge vers un vecteur  $u$  tel que  $|u| = 1$ . Passant à la limite dans l'équation (4.4), on obtient d'une part  $u \in \ker B$  et d'autre part  $\langle A_i u, u \rangle \geq 0$ , ce qui contredit l'hypothèse de stricte dissipativité de  $B_i$

□

Pour appliquer le lemme "fort=faible" de [Sar62], on aura besoin de supposer que l'hypothèse suivante est satisfaite. Plus de commentaires sur cette hypothèse et sur le résultat de [Sar62] seront faits à la fin de ce chapitre.

**Hypothèse 4.1.2** *Les valeurs propres réelles de la matrice  $A_1^{-1}A_2$  associées à des blocs de Jordan sont négatives.*

Enfin en conclusion de ce sous-paragraphe, on introduit les espaces à poids dans lesquels les estimations d'énergie seront établies. Pour  $X$  un espace de Banach (dans la suite de ce chapitre  $X$  pourra être l'espace  $\Omega$  ou l'une de ses faces  $\partial\Omega_1$  ou  $\partial\Omega_2$ ), on pose

$$L_\gamma^2(X) := \{u \in \mathcal{D}'(X) \mid e^{-\gamma t} u \in L^2(X)\}, \quad (4.5)$$

que l'on munit de la norme à poids :

$$\|\cdot\|_{L_\gamma^2(X)} := \|e^{-\gamma t} \cdot\|_{L^2(X)}.$$

## 4.2 Résultat principal.

Le théorème principal pour les problèmes à coin symétriques admettant des conditions de bords strictement dissipatives est le suivant :

**Théorème 4.2.1** *Si le problème à coin (4.1) vérifie les hypothèses 4.1.1 et 4.1.2 et s'il admet des conditions de bord  $B_1$  et  $B_2$  strictement dissipatives au sens de la définition 4.1.1, alors, pour tout  $\gamma > 0$ , pour tout terme source à l'intérieur  $f \in L_\gamma^2(\Omega)$  et pour tout couple de termes sources sur le bord  $(g_1, g_2) \in L_\gamma^2(\partial\Omega_1) \times L_\gamma^2(\partial\Omega_2)$ , il existe une unique solution du problème (4.1),  $u \in L_\gamma^2(\Omega_T)$  à traces  $u|_{x_1=0} \in L_\gamma^2(\partial\Omega_1)$  et  $u|_{x_2=0} \in L_\gamma^2(\partial\Omega_2)$ . De plus, la solution  $u$  vérifie l'estimation d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|u|_{x_1=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|u|_{x_2=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|g_1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|g_2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

où  $C$  est une constante indépendante du paramètre  $\gamma$ .

La démonstration de ce résultat occupera la fin de ce chapitre. On commence par démontrer l'estimation d'énergie a priori.

### 4.2.1 L'estimation d'énergie a priori.

On commence par démontrer la proposition suivante qui, bien que de démonstration plus que classique, constitue la clé de voûte de la démonstration du théorème 4.2.1.

**Proposition 4.2.1** *Soit  $\gamma > 0$ . Alors toute solution assez régulière  $u$  du problème à coin (4.1) vérifie l'estimation d'énergie (4.6).*

**Démonstration :** Soit  $u$  une solution régulière du problème à coin (4.1). On note  $\hat{u}$  la transformée de Laplace en temps et la transformée de Fourier dans la variable  $x'$  de  $u$ .  $\hat{u}$  vérifie le problème à coin :

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 \hat{u} + A_2 \partial_2 \hat{u} + \mathcal{R}(\tau, \eta) \hat{u} = \hat{f}, & \text{sur } \Omega, \\ B_1 \hat{u}|_{x_1=0} = \hat{g}_1, & \text{sur } \partial\Omega_1, \\ B_2 \hat{u}|_{x_2=0} = \hat{g}_2, & \text{sur } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (4.7)$$

où pour  $\sigma := \gamma + i\tau$ , avec  $\gamma > 0$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\eta := (\eta_3, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^{d-2}$  on a posé :

$$\mathcal{R}(\sigma, \eta) := \left( \sigma + i \sum_{j=3}^d \eta_j A_j \right).$$

On prend ensuite le produit scalaire dans  $\mathbb{C}^N$  de l'équation d'évolution de (4.7) avec  $\hat{u}$  puis on intègre sur  $\mathbb{R}_+^2$  dans les variables  $x_1$  et  $x_2$ . Utilisant la symétrie des matrices  $A_j$ , on obtient :

$$2\gamma \int_{\mathbb{R}_+^2} |\hat{u}|^2 dx_1 dx_2 - \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \left\langle A_j \hat{u}|_{x_j=0}, \hat{u}|_{x_j=0} \right\rangle dx_{3-j} = 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}_+^2} \left\langle \hat{f}, \hat{u} \right\rangle dx_1 dx_2. \quad (4.8)$$

Appliquant l'inégalité de Young au membre de droite de (4.8), on obtient :

$$\gamma \int_{\mathbb{R}_+^2} |\hat{u}|^2 dx_1 dx_2 - \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \left\langle A_j \hat{u}|_{x_j=0}, \hat{u}|_{x_j=0} \right\rangle dx_{3-j} \leq \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^2} |\hat{f}|^2 dx_1 dx_2. \quad (4.9)$$

On applique ensuite la caractérisation d'une condition de bord strictement dissipative de la proposition 4.1.1 ; ainsi, pour  $i \in \{1, 2\}$ , il existe deux constantes positives  $c_i$  et  $C_i$  telles que :

$$c_i |u|_{x_i=0}|^2 + \langle A_i u|_{x_i=0}, u|_{x_i=0} \rangle \leq C_i |B_i u|_{x_i=0}|^2,$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma \int_{\mathbb{R}_+^2} |\hat{u}|^2 dx_1 dx_2 &+ \int_0^\infty |\hat{u}|_{x_1=0}| dx_2 + \int_0^\infty |\hat{u}|_{x_2=0}| dx_1 \\ &\leq C \left( \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^2} |\hat{f}|^2 dx_1 dx_2 + \int_0^\infty |\hat{g}_1| dx_2 + \int_0^\infty |\hat{g}_2| dx_1 \right). \end{aligned}$$

On intègre ensuite par rapport à la variable de Fourier  $\eta$  et par rapport à la partie imaginaire de la variable de Laplace  $\tau$ . D'après la formule de Plancherel, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 &+ \|u|_{x_1=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|u|_{x_2=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \\ &\leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|g_1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|g_2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right). \end{aligned}$$

□

### 4.2.2 Existence d'une solution faible pour le problème (4.1).

#### Le problème dual.

**Définition 4.2.1** *Le problème à coin,*

$$\begin{cases} L^*(\partial)v = f, \text{ sur } \Omega, \\ C_1 v|_{x_1=0} = g_1, \text{ sur } \partial\Omega_1, \\ C_2 v|_{x_2=0} = g_2, \text{ sur } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (4.10)$$

*est appelé problème dual du problème à coin (4.1) si pour toutes fonctions régulières  $u$  et  $v$  on a la formule de dualité :*

$$\langle L(\partial)u, v \rangle - \langle u, L^*(\partial)v \rangle = - \sum_{i=1}^2 \langle N_i u|_{x_i=0}, C_i v|_{x_i=0} \rangle + \langle B_i u|_{x_i=0}, M_i v|_{x_i=0} \rangle,$$

*où les matrices  $N_i, C_i \in \mathbf{M}_{N-p_i \times N}(\mathbb{R})$  et  $M_i \in \mathbf{M}_{p_i \times N}(\mathbb{R})$  qui apparaissent dans le membre de droite sont telles que l'on ait la décomposition suivante :*

$$A_i = C_i^T N_i + M_i^T B_i. \quad (4.11)$$

**Proposition 4.2.2** *On pose*

$$L^*(\partial) := -\partial_t - \sum_{j=1}^d A_j \partial_j = -L(\partial).$$

*Alors il existe des matrices  $C_i, N_i \in \mathbf{M}_{N-p_i \times N}(\mathbb{R})$  et  $M_i \in \mathbf{M}_{p_i \times N}(\mathbb{R})$ , telles que le problème à coin (4.10) soit un problème dual pour le problème à coin (4.1).*

*De plus, les  $C_i$  sont caractérisées par*

$$\ker C_i = (A_i \ker B_i)^\perp, \quad (4.12)$$

*et les  $N_i$  sont surjectives et vérifient*

$$\ker B_i \cap \ker N_i = \ker A_i = \{0\}.$$

**Démonstration :** On peut consulter le paragraphe 4.4 de [BG07] pour une démonstration de ce résultat.

□

#### Propriétés du problème dual dans le cas d'un problème symétrique strictement dissipatif.

**Théorème 4.2.2** *On suppose que le problème à coin (4.1) vérifie les hypothèses 4.1.1-4.1.2 et qu'il admet des conditions de bord strictement dissipatives. Alors pour tout choix de matrices  $C_1$  et  $C_2$  vérifiant (4.12), le problème dual associé défini par (4.10) vérifie les hypothèses 4.1.1-4.1.2 et admet aussi des conditions de bord strictement dissipatives.*

**Démonstration :** Le fait que le problème à coin dual (4.10) satisfasse les hypothèses 4.1.1-4.1.2 est une conséquence directe de la définition de  $L^*(\partial)$ . On se concentre donc juste ici sur le caractère dissipatif de ses conditions de bords. Puisque l'opérateur dual  $L^*(\partial)$  est donné par  $L^*(\partial) = -L(\partial)$ , on doit montrer que :

$$\forall v \in \ker C_i \setminus \{0\}, \langle A_i v, v \rangle > 0.$$

Pour ce faire on adapte très légèrement une démonstration de [LP60] du cas dissipatif au cas strictement dissipatif. Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $\underline{v} \in \ker C_i \setminus \{0\}$ , tel que

$$\langle A_i \underline{v}, \underline{v} \rangle \leq 0.$$

Alors pour tout  $u \in \ker B_i$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a :

$$\langle A_i(u + \lambda \underline{v}), (u + \lambda \underline{v}) \rangle = \langle A_i u, u \rangle + 2\lambda \langle A_i u, \underline{v} \rangle + \lambda^2 \langle A_i \underline{v}, \underline{v} \rangle < 0.$$

En effet, le terme  $\langle A_i u, \underline{v} \rangle$  est nul d'après (4.12). Par hypothèse, le premier terme est strictement négatif, le dernier négatif ou nul.

Puisque l'on a supposé  $\ker B_i$  maximal pour la propriété  $\langle A_i \cdot, \cdot \rangle < 0$ , il vient que  $\ker B_i + \text{vect} \{\underline{v}\} \subset \ker B_i$ , c'est-à-dire que  $\underline{v} \in \ker B_i$ . Or d'après la décomposition (4.11), on a alors  $A_i \underline{v} = C_i^* N_i \underline{v}$  et par conséquent,

$$\langle A_i \underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle N_i \underline{v}, C_i \underline{v} \rangle = 0,$$

car  $\underline{v} \in \ker C_i$ . Donc le problème aux limites primal n'est pas strictement dissipatif, d'où la contradiction recherchée.

□

### Solution faible, définitions et existence.

Dans tout ce qui suit pour  $\chi \in \mathbb{R}$ , on notera  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert produit défini par

$$\mathcal{H}_\gamma := L_\chi^2(\Omega) \times L_\chi^2(\partial\Omega_1) \times L_\chi^2(\partial\Omega_2), \quad (4.13)$$

et muni de la norme du produit :

$$\|(u, \bar{u}^1, \bar{u}^2)\|_{\mathcal{H}_\chi}^2 := \|u\|_{L_\chi^2(\Omega)}^2 + \|\bar{u}^1\|_{L_\chi^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|\bar{u}^2\|_{L_\chi^2(\partial\Omega_2)}^2. \quad (4.14)$$

**Définition 4.2.2** Soit  $U = (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \mathcal{H}_\gamma$  et  $f \in L_\gamma^2(\Omega)$ . On dit que  $U$  est une solution faible de l'équation  $L(\partial)u = f$  si pour toute fonction  $v \in H_{-\gamma}^1(\Omega)$  on a la relation :

$$\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, L^*(\partial)v \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle A_1 \bar{u}^1, v|_{x_1=0} \rangle_{L^2(\partial\Omega_1)} - \langle A_2 \bar{u}^2, v|_{x_2=0} \rangle_{L^2(\partial\Omega_2)}$$

**Définition 4.2.3** Soit  $U = (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \mathcal{H}_\gamma$ ,  $f \in L_\gamma^2(\Omega)$  et  $(g_1, g_2) \in L_\gamma^2(\partial\Omega_1) \times L_\gamma^2(\partial\Omega_2)$ . On dit que  $U$  est une solution faible du problème à coin (4.1) si  $U$  est une solution faible de  $L(\partial)u = f$  au sens de la définition 4.2.2 et si de surcroît  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  vérifie :

$$\begin{cases} B_1 \bar{u}^1 = g_1, \\ B_2 \bar{u}^2 = g_2. \end{cases}$$

Il est clair au vu des définitions qu'une solution faible du problème à coin (4.1) de trace dans  $L_\gamma^2(\partial\Omega_1) \times L_\gamma^2(\partial\Omega_2)$  est une solution faible de l'équation  $L(\partial)u = f$ .

Le théorème suivant qui montre que le problème à coin (4.1) admet des solutions faibles suit les travaux de Sarason [Sar62]. Ces travaux diffèrent des précédents résultats (cf. [LP60]-[Fri58]-[Fri54]) pour le problème aux limites standard. En effet, pour construire une solution faible du problème aux limites standard on cherche une solution faible de l'équation  $L(\partial)u = f$  sans se soucier de la régularité de sa trace sur le bord du domaine. La régularité de la trace est alors obtenue en utilisant

le fait que l'on peut toujours régulariser la solution faible et sa trace (sans changer la valeur de cette trace) en régularisant seulement dans les variables tangentielles. On obtient alors une solution forte (la régularité par rapport à la variable normale étant automatiquement donnée par l'équation d'évolution) dont la trace sur le bord du domaine a bien un sens.

Cette technique semble difficile à adapter au cas du problème à coin car pour obtenir assez de régularité sur la solution on doit régulariser dans l'une des variables normales et on change ainsi la valeur de l'une des traces. C'est pourquoi, on cherche une solution faible avec des traces dans  $L^2_\gamma(\partial\Omega)$  et l'on conclut ensuite par un lemme "fort=faille" dont la démonstration est plus longue et technique que dans le cas du demi-espace.

**Théorème 4.2.3** *Soit  $f \in L^2_\gamma(\Omega)$ ,  $(g_1, g_2)$  un couple de  $L^2_\gamma(\partial\Omega_1) \times L^2_\gamma(\partial\Omega_2)$ . On suppose que le problème à coin (4.1) vérifie les hypothèses 4.1.1-4.1.2 et qu'il admet des conditions de bord strictement dissipatives ; alors (4.1) admet une solution faible  $U \in \mathcal{H}_\gamma$ .*

**Démonstration :** La démonstration de ce résultat se base sur les idées de [BG07] paragraphe 4.5.3 et de [Sar62].

On introduit l'ensemble

$$X_{-\gamma} := \{ (L^*(\partial)v, C_1v|_{x_1=0}, C_2v|_{x_2=0}) \text{ avec } v \in H^1_{-\gamma} \} := \{ \mathcal{L}^*v \text{ avec } v \in H^1_{-\gamma} \}.$$

D'après le théorème 4.2.2, le problème à coin dual de (4.1) vérifie les hypothèses 4.1.1-4.1.2 et admet des conditions de bord strictement dissipatives. En vertu de la proposition 4.2.1, les solutions régulières  $v$  du problème dual vérifient l'estimation d'énergie a priori :

$$\|v\|_{\mathcal{H}_{-\gamma}} \leq C_\gamma \|\mathcal{L}^*v\|_{\mathcal{H}_{-\gamma}}. \quad (4.15)$$

Soit  $(f, g_1, g_2) \in \mathcal{H}_\gamma$  on définit la forme linéaire  $\ell : X_{-\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\ell(\mathcal{L}^*v) := \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle M_1v|_{x_1=0}, g_1 \rangle_{L^2(\partial\Omega_1)} + \langle M_2v|_{x_2=0}, g_2 \rangle_{L^2(\partial\Omega_2)},$$

où les deux derniers produits scalaires sont des produits scalaires entre vecteurs de taille  $p_1$  et  $p_2$  respectivement.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young on obtient :

$$\begin{aligned} |\ell(\mathcal{L}^*v)| &\leq \|f\|_{L^2_\gamma(\Omega)} \|v\|_{L^2_{-\gamma}(\Omega)} + c_1 \|g_1\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_1)} \|v|_{x_1=0}\|_{L^2_{-\gamma}(\partial\Omega_1)} + c_2 \|g_2\|_{L^2_\gamma(\partial\Omega_2)} \|v|_{x_2=0}\|_{L^2_{-\gamma}(\partial\Omega_2)} \\ &\leq C_\gamma \|v\|_{\mathcal{H}_{-\gamma}}. \end{aligned}$$

L'estimation (4.15) permet alors de conclure que

$$|\ell(\mathcal{L}^*v)| \leq C \|\mathcal{L}^*v\|_{\mathcal{H}_{-\gamma}}.$$

Ainsi, d'après le théorème de Hahn-Banach,  $\ell$  se prolonge par continuité à  $\mathcal{H}_{-\gamma}$  et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément  $\underline{U} = (u, \underline{u}^1, \underline{u}^2) \in \mathcal{H}_\gamma$  tel que pour tout  $\mathcal{L}^*v$  de  $\mathcal{H}_{-\gamma}$  :

$$\ell(\mathcal{L}^*v) = \langle u, L^*(\partial)v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \underline{u}^1, C_1v|_{x_1=0} \rangle_{L^2(\partial\Omega_1)} + \langle \underline{u}^2, C_2v|_{x_2=0} \rangle_{L^2(\partial\Omega_2)}. \quad (4.16)$$

En injectant la définition de  $\ell(\mathcal{L}^*v)$  dans l'équation (4.16), on voit que  $\underline{U}$  satisfait :

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, L^*(\partial)v \rangle_{L^2(\Omega)} &= - \langle g_1, M_1v|_{x_1=0} \rangle + \langle \underline{u}^1, C_1v|_{x_1=0} \rangle \\ &\quad - \langle g_2, M_2v|_{x_2=0} \rangle + \langle \underline{u}^2, C_2v|_{x_2=0} \rangle, \end{aligned}$$

équation dans laquelle on va modifier les éléments du bord  $\underline{u}^1$  et  $\underline{u}^2$  en un certain couple  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  de manière à forcer l'apparition des termes  $\langle A_1 \bar{u}^1, v_{|x_1=0} \rangle$  et  $\langle A_2 \bar{u}^2, v_{|x_2=0} \rangle$  dans le membre de droite. Ceci permettra de montrer que  $U := (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2)$  est une solution faible de  $L(\partial)u = f$ .

On rappelle la décomposition (4.11) :

$$\forall i \in \{1, 2\}, A_i = C_i^T N_i + M_i^T B_i.$$

Les matrices  $N_i$  et  $B_i$  étant surjectives on peut trouver  $\tilde{u}^i$  et  $h_i$  deux éléments de  $L_\gamma^2(\partial\Omega_i, \mathbb{R}^N)$  tels que :

$$-\langle g_i, M_i v_{|x_i=0} \rangle + \langle \underline{u}^i, C_i v_{|x_i=0} \rangle = \langle (C_i^T N_i \tilde{u}^i - M_i^T B_i h_i), v_{|x_i=0} \rangle.$$

Donc le triplet  $U := (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2)$  où

$$\forall i \in \{1, 2\}, \bar{u}^i := A_i^{-1}(M_i^T B_i h_i - C_i^T N_i \tilde{u}^i), \quad (4.17)$$

est par construction une solution faible de  $L(\partial)u = f$ .

Pour conclure la démonstration et montrer que  $U = (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2)$  est en fait une solution faible du problème à coin (4.1) il suffit donc au vu de la définition 4.2.3 de montrer que  $\bar{u}^1$  et  $\bar{u}^2$  vérifient les conditions de bords.

On calcule :

$$B_i \bar{u}^i = -B_i A_i^{-1} C_i^T N_i \tilde{u}^i + B_i A_i^{-1} M_i^T B_i h_i. \quad (4.18)$$

Or  $B_i A_i^{-1} C_i^T N_i = 0$ . En effet, utilisant les propriétés des  $N_i$  (cf. proposition 4.2.2), on sait que

$$\ker B_i \oplus \ker N_i = \mathbb{C}^N.$$

Soit  $u \in \ker B_i$ , on a d'après la décomposition de  $A_i$  :

$$B_i A_i^{-1} C_i^T N_i u = B_i A_i^{-1} (A_i - M_i^T B_i) u = B_i u - B_i A_i^{-1} M_i^T B_i u = 0.$$

On montre ensuite que  $B_i A_i^{-1} M_i^T B_i = B_i$ . Il suffit de le montrer sur  $\ker N_i$ . Soit  $u \in \ker N_i$ , on a cette fois :

$$B_i A_i^{-1} M_i^T B_i u = B_i A_i^{-1} (A_i - C_i^T N_i) u = B_i u.$$

Par conséquent, l'équation (4.18) devient :

$$B_i \bar{u}^i = B_i h_i = g_i. \quad (4.19)$$

Ainsi  $U$  est une solution faible du problème à coin (4.1).

□

Afin de finir de démontrer le théorème 4.2.1, maintenant que l'existence d'une solution faible est démontrée, il ne reste plus qu'à établir l'unicité de cette solution faible et à montrer qu'elle vérifie l'estimation d'énergie a priori. La fin de la démonstration passe par le théorème "fort=faible" suivant.



### 4.2.3 Théorème "fort=faible".

**Définition 4.2.4** Soit  $f \in L^2_\gamma(\Omega)$  et  $U = (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \mathcal{H}_\gamma$ . Alors,  $U$  est une solution forte de  $L(\partial)u = f$  si il existe une suite de fonctions  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1_\gamma(\Omega)$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - (u^n, u^n_{|x_1=0}, u^n_{|x_2=0})\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2 + \|L(\partial)u_n - f\|_{L^2_\gamma(\Omega)}^2 = 0.$$

Il est clair que si  $U$  est une solution forte de l'équation  $L(\partial)u = f$  alors c'est une solution faible. La réciproque de ce résultat est fournie par le théorème suivant dont on rappelle l'énoncé tel qu'il apparaît dans [Sar62]. Les hypothèses de [Sar62] sont les suivantes :

Soit  $\Omega$  un domaine de frontière  $\partial\Omega$  régulière par morceaux. On considère l'opérateur

$$L := A_1 \partial_1 + A_2 \partial_2 + C, \text{ sur } \Omega.$$

où les  $A_i$  et  $C$  sont des matrices carrées de taille  $N$ , ces dernières pouvant éventuellement dépendre de la variable d'espace  $x$ . On suppose alors dans ce cas que les  $A_j$  sont de régularité  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  et que  $C$  est de régularité  $\mathcal{C}^0(\Omega)$ . On impose les conditions suivantes aux coins de  $\Omega$  :

i) Il existe une combinaison linéaire de  $A_1$  et de  $A_2$  qui n'est pas singulière. Par simplicité on supposera qu'au voisinage du coin considéré  $L$  peut s'écrire sous la forme :

$$L = \partial_1 + A \partial_2 + C.$$

ii) Soit  $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$  un coin de  $\Omega$  et  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A$  correspondant à un sous-espace propre non simple, alors la caractéristique  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 - \underline{x}_2 = \lambda(x_1 - \underline{x}_1)\}\}$  est en dehors de  $\Omega$ .

iii) Au voisinage des coins de  $\Omega$  l'opérateur  $L$  ne change pas de type au sens où les valeurs propres de  $A$  ne changent pas de type (une valeur propre réelle reste réelle et sa multiplicité ne change pas).

Dans notre cas d'étude, les matrices  $A_j$  sont constantes ainsi  $A := A_1^{-1} A_2$  permet de vérifier le point i). Le point iii) est aussi automatiquement vérifié car  $A$  est une matrice constante. Enfin, le point ii) est assuré grâce au fait que les valeurs propres réelles de la matrice  $A_1^{-1} A_2$  associées à des blocs de Jordan sont strictement négatives d'après l'hypothèse 4.1.2.

Grâce à l'hypothèse 4.1.2, on peut donc appliquer le théorème de Sarason [Sar62] à notre cadre d'étude :

**Théorème 4.2.4 (Sarason)** [Sar62] Soit  $f \in L^2_\gamma(\Omega)$ . Si l'équation  $L(\partial)u = f$  admet une solution faible  $U = (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \mathcal{H}_\gamma$ , alors  $U$  est une solution forte de l'équation  $L(\partial)u = f$ .

**Démonstration :** On renvoie à [Sar62] p.249-273 pour une démonstration de ce résultat.

□

**Remarque** L'hypothèse 4.1.2 est donc utilisée pour pouvoir appliquer ce théorème "fort=faible" et c'est le seul endroit où on l'utilise dans cette analyse. Plusieurs commentaires sur cette hypothèse et plus particulièrement sur le fait d'utiliser le théorème de Sarason pour conclure sont faits dans le paragraphe 5.6.1.

#### 4.2.4 Unicité de la solution faible du problème (4.1).

D'après le théorème 4.2.3, on sait qu'il existe  $U = (u, \bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \mathcal{H}_\gamma$ , une solution faible du problème à coin (4.1), en particulier c'est une solution faible de l'équation  $L(\partial)u = f$ . D'après le théorème 4.2.4,  $U$  est une solution forte de l'équation  $L(\partial)u = f$ , donc il existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_\gamma^1(\Omega)$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - (u^n, u_{|x_1=0}^n, u_{|x_2=0}^n)\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2 + \|L(\partial)u_n - f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 = 0. \quad (4.20)$$

Or  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de solutions régulières, d'après la proposition 4.2.1 elle vérifie l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} \gamma \|u^n\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|u_{|x_1=0}^n\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|u_{|x_2=0}^n\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \leq & C \left( \frac{1}{\gamma} \|L(\partial)u^n\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \|B_1 u_{|x_1=0}^n\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|B_2 u_{|x_2=0}^n\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

On peut donc évaluer par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|\bar{u}^1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|\bar{u}^2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \leq & C \left( \frac{1}{\gamma} \|L(\partial)u^n\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 \right. \\ & + \|B_1 u_{|x_1=0}^n\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|B_2 u_{|x_2=0}^n\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \\ & \left. + C_\gamma \|U - (u^n, u_{|x_1=0}^n, u_{|x_2=0}^n)\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

On prend ensuite la limite pour  $n$  grand, en utilisant l'équation (4.20), il vient :

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|\bar{u}^1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|\bar{u}^2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \leq & C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \|B_1 \bar{u}^1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|B_2 \bar{u}^2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que  $U$  est une solution faible du problème à coin (4.1) donc  $\bar{u}^1$  (resp.  $\bar{u}^2$ ) vérifie  $B_1 \bar{u}^1 = g_1$  (resp.  $B_2 \bar{u}^2 = g_2$ ). D'où le fait que la solution faible  $U$  vérifie l'estimation d'énergie :

$$\gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|\bar{u}^1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|\bar{u}^2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|g_1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|g_2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right). \quad (4.23)$$

Utilisant la linéarité du problème à coin (4.1), une fois l'estimation d'énergie (4.23) pour la solution faible établie l'unicité de la solution faible est immédiate. Ceci conclut la démonstration du théorème 4.2.1.



## Chapitre 5

# Problème à coin dans le cadre général et condition d'Osher.

### 5.1 Description du problème

Dans ce chapitre on considère comme au chapitre précédent un problème à coin qui s'écrit sous la forme (4.1), mais pour lequel les conditions de bord ne sont plus strictement dissipatives.

On supposera donc dans ce chapitre que le problème à coin sur lequel on travaille vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chacune des faces du domaine. On rappelle que cette condition est nécessaire et suffisante pour que le problème aux limites standard soit fortement bien posé. Sans grande surprise, on montrera qu'une condition nécessaire pour que le problème à coin soit fortement bien posé est que chaque face vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme.

Le but de ce chapitre est de donner un ensemble de conditions suffisantes (que l'on espère aussi être nécessaires) pour que le problème à coin soit fortement bien posé et ainsi établir un théorème "analogue" à celui de Kreiss [Kre70] pour le cas du demi-espace.

L'étude suivante est très inspirée des travaux d'Osher [Osh73]-[Osh74b] sur le sujet, et plus particulièrement de [Osh73] dans lequel l'auteur montre une estimation d'énergie a priori pour les solutions du problème à coin en introduisant un symétriseur "de type Kreiss". La construction de ce symétriseur est rendue possible grâce à une nouvelle condition, la condition au coin. Cette condition, qui sera décrite précisément dans le sous-paragraphe 5.3.2, est une relation de compatibilité entre les traces de la solution du problème à coin. Plus précisément, la condition au coin impose l'inversibilité d'un opérateur qui donne la différence entre la trace de la solution sur un bord et le résultat obtenu après réflexion de cette trace sur l'autre face du domaine.

Cependant, même sous cette nouvelle condition, l'estimation d'énergie démontrée dans [Osh73] est une estimation avec un nombre de pertes de dérivées qui n'est pas explicite. Cette estimation est donc insuffisante en l'état pour conclure au caractère fortement bien posé. Ces pertes de régularité entre les données et la solution compliquent de plus le passage aux coefficients variables. Enfin, dans [Osh73] aucun résultat sur l'existence d'une solution faible, ni de son unicité n'est donné.

Dans ce chapitre on a donc essayé, d'établir une estimation d'énergie a priori sans pertes. Pour cela, on a suivi la méthode d'Osher et par conséquent on se place aussi sous la condition au coin. On a réitéré la construction du symétriseur d'Osher, cette dernière sera décrite au paragraphe 5.5 dans un souci de complétude de la démonstration. Un des apports de ce travail par rapport à celui de [Osh73] est d'avoir identifié une condition suffisante sous laquelle l'estimation d'énergie que l'on

obtient est sans pertes. On ne sait pas, à l'heure actuelle, si cette condition est automatiquement satisfaite mais on donne un argument allant dans ce sens au paragraphe 5.5.3.

## 5.2 Notations et résultats préliminaires.

Les notations pour le quart d'espace et ses faces sont les mêmes qu'au chapitre 4 (cf. (4.1) et (4.2)).

De même les espaces à poids dans lesquels seront démontrées les estimations d'énergie sont les mêmes qu'au chapitre quatre (cf. (4.5)).

Comme au chapitre 4, le problème à coin que l'on étudie est global en temps et s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} L(\partial)u := \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u = f, \text{ sur } \Omega, \\ B_1 u|_{x_1=0} = g_1, \text{ sur } \partial\Omega_1, \\ B_2 u|_{x_2=0} = g_2, \text{ sur } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

et on suppose que ce problème à coin admet un bord non caractéristique et qu'il est symétrique. En d'autres termes, on se place sous l'hypothèse 4.1.1.

On introduit l'espace des fréquences,  $\Xi$  défini par :

$$\Xi := \left\{ (\sigma := \gamma + i\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-2} \setminus \gamma \geq 0 \right\} \setminus \{0\}.$$

On introduit aussi  $\Xi_0$ , la frontière de  $\Xi$  :

$$\Xi_0 := \Xi \cap \{\gamma = 0\}.$$

Dans tout ce qui suit, lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, on notera  $\zeta$  le couple de fréquences  $(\sigma, \eta)$ .

On aura besoin de considérer dans la suite de ce chapitre les deux problèmes aux limites standards globaux en temps :

$$\begin{cases} L(\partial)u = f, \text{ sur } x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}, \\ B_1 u|_{x_1=0} = g_1, \text{ sur } x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.2)$$

et

$$\begin{cases} L(\partial)u = f, \text{ sur } x_2 > 0, x_1 \in \mathbb{R}, \\ B_2 u|_{x_2=0} = g_2, \text{ sur } x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.3)$$

De façon assez classique, on introduit la matrice résolvante  $\mathcal{A}_1$  (resp.  $\mathcal{A}_2$ ) associée au problème aux limites standard (5.2) (resp. (5.3)). La matrice  $\mathcal{A}_1$  (resp.  $\mathcal{A}_2$ ) est obtenue après transformée de Fourier dans la variable d'espace tangentielle  $(x_2, x') \leftrightarrow (\eta_2, \eta)$  (resp.  $(x_1, x') \leftrightarrow (\eta_1, \eta)$ ) et transformée de Laplace dans la variable temporelle  $t \leftrightarrow \sigma$  dans le problème aux limites (5.2) (resp. (5.3)). Après ces deux transformations, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_1 \hat{u} = \mathcal{A}_1(\zeta, \eta_2) \hat{u} + \hat{f}, \text{ sur } x_1 > 0, \\ B_1 \hat{u}|_{x_1=0} = \hat{g}_1, \end{cases}$$

où la matrice  $\mathcal{A}_1(\zeta, \eta_2)$  est définie par :

$$\mathcal{A}_1(\zeta, \eta_2) := -A_1^{-1} \left( \sigma + i \sum_{j \neq 1} \eta_j A_j \right). \quad (5.4)$$

Ainsi que

$$\mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1) := -A_2^{-1} \left( \sigma + i \sum_{j \neq 2} \eta_j A_j \right), \quad (5.5)$$

où  $\eta_1$  est la variable duale de  $x_1$ .

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on notera  $E_i^s(\zeta, \eta_{3-i})$  (resp.  $E_i^u(\zeta, \eta_{3-i})$ ) le sous-espace stable (resp. instable) de la matrice résolvante  $\mathcal{A}_i(\zeta, \eta_{3-i})$ .

Par rapport au chapitre 4, et de façon assez classique lorsque l'on étudie des problèmes aux limites avec des conditions de bord non strictement dissipatives, on renforce l'hypothèse d'hyperbolicité. C'est-à-dire que, l'on ne se place plus seulement dans la classe des opérateurs symétriques, mais que l'on suppose que l'hypothèse d'hyperbolicité à multiplicité constante suivante satisfaite :

**Hypothèse 5.2.1** *Il existe un entier positif  $M$ , des fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  à valeurs réelles ainsi que des entiers positifs  $\nu_1, \dots, \nu_M$  tels que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \det \left( \tau + \sum_{j=1}^d \xi_j A_j \right) = \prod_{k=1}^M (\tau + \lambda_k(\xi))^{\nu_k},$$

avec  $\lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_M(\xi)$ , et de plus que les valeurs propres  $\lambda_k(\xi)$  de  $\sum_{j=1}^d \xi_j A_j$  sont semi-simples.

On peut alors appliquer le lemme de Hersh [Her63] qui montre que pour toute fréquence  $(\zeta, \eta_{3-i}) \in (\Xi \setminus \Xi_0)$  les problèmes aux limites (5.2) et (5.3) n'ont pas de sous-espace critique (au sens des systèmes dynamiques). En d'autres termes, pour  $i \in \{1, 2\}$  on a la décomposition suivante : on sait que pour toute fréquence on a :

$$\forall \zeta \in \Xi \setminus \Xi_0, \eta_{3-i} \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}^N := E_i^s(\zeta, \eta_{3-i}) \oplus E_i^u(\zeta, \eta_{3-i}). \quad (5.6)$$

Pour les fréquences  $\zeta \in \Xi_0$ , le théorème de structure par blocs de [Kre70] et [Mét00] décrit au chapitre 2 de ce manuscrit (cf. théorème 2.1.1) s'applique à chaque matrice résolvante et permet de prolonger le sous-espace stable par continuité aux fréquences de  $\Xi_0$ . La différence par rapport au chapitre 1 est qu'ici on ne se place pas autour d'une fréquence hors de la zone de glancing, donc les décompositions de l'espace  $\mathbb{C}^N$  en sous-espace stable et sous-espace instable prolongés (cf. (2.3) et (2.4)) deviennent :

$$\forall \zeta \in \Xi_0, \eta_{3-i} \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}^N = E_i^s(\zeta, \eta_{3-i}) \oplus E_i^u(\zeta, \eta_{3-i}), \quad (5.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in \Xi_0, \eta_{3-i} \in \mathbb{R}, \quad E_i^s(\zeta, \eta_{3-i}) &= E_i^{s,e}(\zeta, \eta_{3-i}) \oplus E_i^{s,h}(\zeta, \eta_{3-i}) \oplus E_i^{s,g}(\zeta, \eta_{3-i}), \\ E_i^u(\zeta, \eta_{3-i}) &= E_i^{u,e}(\zeta, \eta_{3-i}) \oplus E_i^{u,h}(\zeta, \eta_{3-i}) \oplus E_i^{u,g}(\zeta, \eta_{3-i}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

où  $E_i^{s,e}(\zeta, \eta_{3-i})$  (resp.  $E_i^{u,e}(\zeta, \eta_{3-i})$ ) est le sous-espace propre généralisé associé aux valeurs propres de  $\mathcal{A}_i(\zeta, \eta_{3-i})$  de partie réelle strictement négative (resp. positive), où les espaces  $E_i^{s,h}(\zeta, \eta_{3-i})$  et  $E_i^{u,h}(\zeta, \eta_{3-i})$  sont des sommes de sous-espace propres associés aux valeurs propres imaginaires pures,  $i\lambda_{i,j}$ , de la matrice  $\mathcal{A}_i(\zeta, \eta_{3-i})$  vérifiant  $\partial_\gamma \lambda_{i,j}(\zeta, \eta_{3-i}) \neq 0$ .

Pour  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ , on peut définir les projecteurs suivants :

**Définition 5.2.1** *Pour  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ ,  $i \in \{1, 2\}$  et  $\eta_{3-i} \in \mathbb{R}$ , on pose  $\Pi_i^s := \Pi_i^s(\zeta, \eta_{3-i})$  (resp.  $\Pi_i^u := \Pi_i^u(\zeta, \eta_{3-i})$ ) le projecteur sur  $E_i^s$  (resp.  $E_i^u$ ) associé à la décomposition (??).*

**Remarque** On insiste ici sur le fait que bien que le sous-espace stable  $E_i^s(\zeta, \eta_{3-i})$  admette un prolongement par continuité à  $\zeta \in \Xi_0$  donné par (5.8), la norme du projecteur  $\Pi_i^s(\zeta, \eta_{3-i})$  explose au voisinage des fréquences de glancing. C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre, puisque l'on aura besoin d'assurer que les projecteurs  $\Pi_i^s$  et  $\Pi_i^u$  sont bien définis, on supposera que  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ , zone dans laquelle il n'y a pas de mode de glancing et où les projecteurs  $\Pi_i^s$  et  $\Pi_i^u$  sont bien définis.

### 5.3 Définitions et hypothèses.

Dans ce paragraphe on donne un ensemble de conditions et d'hypothèses sur le problème à coin (5.1) que l'on pense être suffisant pour conduire au caractère fortement bien posé du problème à coin (5.1).

On rappelle que par fortement bien posé on entend l'existence et l'unicité de la solution  $u \in L_\gamma^2(\Omega)$  à trace dans  $L_\gamma^2(\partial\Omega_1) \times L_\gamma^2(\partial\Omega_2)$  qui vérifie de plus l'estimation d'énergie suivante :  $\exists C, \forall \gamma \geq \gamma_0 > 0$ , on ait

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|u|_{x_1=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|u|_{x_2=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|g_1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|g_2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

On a déjà mentionné au début du paragraphe précédent que l'on se plaçait sous l'hypothèse de symétrie des coefficients de l'opérateur  $L(\partial)$ , que l'on supposait aussi qu'il vérifiait l'hypothèse d'hyperbolicité à multiplicité constante et qu'enfin le bord de  $\Omega$  était non caractéristique pour  $L(\partial)$ . On va maintenant décrire les nouvelles conditions sous lesquelles on se place.

#### 5.3.1 Une condition provenant de l'étude du problème aux limites, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme.

Comme dans l'analyse classique par modes normaux du problème aux limites standard on peut par transformée de Fourier en espace dans la variable  $x'$  et transformée de Laplace dans la variable  $t$  se ramener à étudier le problème à coin suivant :

$$\begin{cases} L(\partial)\hat{u} := A_1\partial_1\hat{u} + A_2\partial_2\hat{u} + [\sigma + iA'(\eta)]\hat{u} = \hat{f}, \text{ pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \\ B_1\hat{u}|_{x_1=0} = \hat{g}_1, \text{ sur } x_2 \in \mathbb{R}_+, \\ B_2\hat{u}|_{x_2=0} = \hat{g}_2, \text{ sur } x_1 \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (5.10)$$

où  $\sigma := \gamma + i\tau \in \mathbb{C}_+$  est la variable duale en temps,  $\eta \in \mathbb{R}^{d-2}$  est la variable duale en espace et où, pour simplifier les notations, on a posé

$$A'(\eta) := \sum_{j=3}^d \eta_j A_j.$$

On omettra aussi, lorsque le propos le permet, la notation de la transformée de Fourier-Laplace.

La proposition suivante montre que comme pour le problème aux limites posé dans le demi-espace, pour étudier le caractère fortement bien posé du problème à coin (5.1) on peut se ramener à une étude sur le problème à coin résolvant (5.10). Cette proposition aura aussi pour conséquence qu'il est nécessaire pour que le problème (5.1) soit fortement bien posé que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme soit vérifiée sur les deux faces du bord.

**Proposition 5.3.1** *Le problème à coin (5.1) est fortement bien posé si et seulement si le problème à coin (5.10) admet une unique solution  $u \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$ , à trace dans  $(L^2(\mathbb{R}_+))^2$  qui vérifie de plus l'estimation d'énergie :  $\forall \gamma > 0$ ,*

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|u|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|u|_{x_2=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|g_2\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $\gamma$ .

**Démonstration :** L'implication : "Si (5.10) est fortement bien posé alors (5.1) est fortement bien posé" est une conséquence du théorème de Paley-Wiener.

On considère donc ici seulement l'implication "Si (5.1) est fortement bien posé alors (5.10) est fortement bien posé".

Soit  $v$  la solution du problème à coin (5.1), par transformée de Laplace et de Fourier on obtient  $u$  une solution du problème à coin (5.10).

Soit  $\underline{\zeta} := (\underline{\gamma} + i\underline{\tau}, \underline{\eta})$  une fréquence fixée, on introduit une suite de fonctions  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2})$  qui vérifie la propriété de support suivante,

$$\begin{cases} \varphi_n(t, x') = 1 \text{ sur } \mathcal{B}(0, n), \\ \varphi_n(t, x') = 0 \text{ sur } \mathcal{B}(0, n+1)^c, \end{cases}$$

où  $\mathcal{B}(0, n)$  désigne la boule euclidienne de  $\mathbb{R}^{d-1}$  centrée en 0 et de rayon  $n$ . On suppose de plus que  $\varphi_n$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  et que  $\nabla_{t, x'} \varphi_n$  est borné par une constante indépendante de  $n$ .

On définit alors,

$$u_n(t, x_1, x_2, x') := e^{\underline{\sigma}t + ix' \cdot \underline{\eta}} \frac{\varphi_n(t, x')}{\sqrt{|\mathcal{B}(0, n)|}} u(x_1, x_2).$$

Un simple calcul montre alors que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait le problème à coin :

$$L(\partial)u_n = \frac{e^{\underline{\sigma}t + ix' \cdot \underline{\eta}}}{\sqrt{|\mathcal{B}(0, n)|}} \left[ \varphi_n \hat{f} + u \left( \partial_t \varphi_n + \sum_{j=3}^d A_j \partial_j \varphi_n \right) \right] := f_n,$$

et pour  $i \in \{1, 2\}$

$$B_i u_n|_{x_i=0} = \frac{e^{\underline{\sigma}t + ix' \cdot \underline{\eta}} \varphi_n}{\sqrt{|\mathcal{B}(0, n)|}} \hat{g}_i := g_{i,n}.$$

Le problème à coin (5.1) étant fortement bien posé, on applique l'estimation d'énergie (5.9) à  $u_n$ , et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} \|u_n\|_{L_{\underline{\gamma}}^2(\Omega)}^2 + \|u_n|_{x_1=0}\|_{L_{\underline{\gamma}}^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|u_n|_{x_2=0}\|_{L_{\underline{\gamma}}^2(\partial\Omega_2)}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\underline{\gamma}} \|f_n\|_{L_{\underline{\gamma}}^2(\Omega)}^2 + \|g_{1,n}\|_{L_{\underline{\gamma}}^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|g_{2,n}\|_{L_{\underline{\gamma}}^2(\partial\Omega_2)}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Or

$$\|u_n\|_{L_{\underline{\gamma}}^2(\Omega)}^2 = \int_{\mathbb{R}_+^2} |u(x_1, x_2)|^2 \left( \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2}} \frac{|\varphi_n(t, x')|^2}{|\mathcal{B}(0, n)|} dt dx' \right) dx_1 dx_2,$$



mais par construction

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2}} \frac{|\varphi_n(t, x')|^2}{|\mathcal{B}(0, n)|} dt dx' \leq \sqrt{\pi},$$

où l'on a utilisé l'expression  $|\mathcal{B}(0, r)| = \frac{\pi^{r/2} r^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$  ( $\Gamma$  étant la fonction gamma d'Euler) pour évaluer  $\frac{|\mathcal{B}(0, n+1)|^2}{|\mathcal{B}(0, n)|}$ . Par conséquent, on a montré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2_{\underline{\gamma}}(\Omega)}^2 \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} |u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2.$$

La même méthode permet aussi de montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n|_{x_1=0}}\|_{L^2_{\underline{\gamma}}(\partial\Omega_1)}^2 &\geq \|u_{|_{x_1=0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n|_{x_2=0}}\|_{L^2_{\underline{\gamma}}(\partial\Omega_2)}^2 &\geq \|u_{|_{x_2=0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \end{aligned}$$

et pour  $i \in \{1, 2\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_{i,n}\|_{L^2_{\underline{\gamma}}(\partial\Omega_i)}^2 \leq \sqrt{\pi} \|\widehat{g}_i\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Ainsi pour montrer que  $u$  satisfait l'estimation d'énergie (5.11) il suffit de montrer que  $\|f_n\|_{L^2_{\underline{\gamma}}(\Omega)}$  tend vers  $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  et de passer à la limite dans (5.12). Un simple calcul permet d'écrire :

$$\|f_n\|_{L^2_{\underline{\gamma}}(\Omega)} := \|f_n\|_{L^2_{t,x'}(\mathcal{B}(0,n)) \times L^2_{x_1,x_2}(\mathbb{R}_+^2)} + I_n,$$

où l'on a posé :

$$I_n := \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \int_{\mathcal{C}(n,n+1)} \left| \frac{f\varphi_n + u[\partial_t \varphi_n + A'(\nabla_{x'} \varphi_n)]}{\mathcal{B}(0, n)} \right|^2 dt dx' \right) dx_1 dx_2,$$

et où  $\mathcal{C}(n, n+1)$  désigne la couronne de petit rayon  $n$  et de grand rayon  $n+1$ . Par hypothèse sur la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , posant

$$C := \max(\max_i (\|A_i\|), \sup_n |\nabla_{t,x'} \varphi_n|, 1), \text{ et } M := \max(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}),$$

on peut majorer le terme intégral  $I_n$  par

$$|I_n| \leq \frac{MC}{|\mathcal{B}(0, n)|} \int_{\mathcal{C}(n,n+1)} dt dx'.$$

Utilisant encore une fois l'expression de  $|\mathcal{B}(0, r)|$  en fonction de la fonction gamma d'Euler, on obtient :

$$\frac{1}{|\mathcal{B}(0, n)|} \int_{\mathcal{C}(n,n+1)} dt dx' = \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^d - 1 \right) \rightarrow 0.$$

Par conséquent,  $I_n$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini et donc le passage à la limite pour  $n$  tendant vers l'infini donne bien :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} \|u\|_{L^2_{x_1,x_2}(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|u_{|_{x_1=0}}\|_{L^2_{x_2}(\mathbb{R}_+)}^2 + \|u_{|_{x_2=0}}\|_{L^2_{x_1}(\mathbb{R}_+)}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\underline{\gamma}} \|\widehat{f}\|_{L^2_{x_1,x_2}(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|\widehat{g}_1\|_{L^2_{x_2}(\mathbb{R}_+)}^2 + \|\widehat{g}_2\|_{L^2_{x_1}(\mathbb{R}_+)}^2 \right). \end{aligned}$$

□

Comme indiqué au début de ce sous-paragraphe, la proposition 5.3.1 a le corollaire suivant :

**Corollaire 5.3.1** *Pour que le problème à coin (5.1) soit fortement bien posé il est nécessaire que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme soit vérifiée sur les deux faces du bord de  $\Omega$ , c'est-à-dire : pour  $i \in \{1, 2\}$ ,*

$$\forall \zeta \in \Xi, \eta_{3-i} \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}^N = \ker B_i \oplus E_i^s(\zeta, \eta_{3-i}),$$

où l'on rappelle que  $E_i^s$  désigne le prolongement par continuité à  $\Xi_0$  du sous-espace stable de la matrice résolvante  $\mathcal{A}_i$ .

Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera donc que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est vérifiée sur chaque face. On se place donc sous l'hypothèse suivante (qui est juste une reformulation plus pratique de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme) :

**Hypothèse 5.3.1** *Pour  $i \in \{1, 2\}$ , pour tout  $\zeta \in \Xi, \eta_{3-i} \in \mathbb{R}$ , la restriction de la matrice  $B_i$  au sous-espace stable  $E_i^s(\zeta, \eta_{3-i})$  est un isomorphisme. On note alors :*

$$\phi_i(\zeta, \eta_{3-i}) := B_{i|E_i^s(\zeta, \eta_{3-i})}^{-1}.$$

### 5.3.2 La condition au coin.

Dans ce sous-paragraphe on va décrire une nouvelle condition suffisante (voir hypothèse 5.3.2) pour que le problème à coin (5.1) soit fortement bien posé. Cette condition est initialement due à Osher dans [Osh73].

L'apparition d'une nouvelle condition pour assurer le caractère fortement bien posé n'est pas vraiment étonnante. Il aurait en effet été surprenant que la condition de Kreiss-Lopatinskii imposée sur les deux bords soit suffisante pour assurer le caractère fortement bien posé du problème à coin (5.1).

Avant de décrire la nouvelle condition que l'on va supposée, on étudie l'exemple suivant (voir [Osh73]) qui est un système très simple, constitué de deux équations de transport couplées seulement par les conditions de bord, et qui montre que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est en effet pas suffisante pour assurer le caractère fortement bien posé. On considère :

$$\begin{cases} \partial_t u + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \partial_1 u + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \partial_2 u = 0, \\ \begin{bmatrix} 1 & -a \end{bmatrix} u|_{x_1=0} = g_1, \\ \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} u|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ . On peut facilement montrer que les sous-espaces stables  $E_i^s(\zeta, \eta_{3-i})$  sont donnés par :

$$E_1^s(\zeta, \eta_2) = E_1^s = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2^s(\zeta, \eta_1) = E_2^s = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En particulier la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est satisfaite pour tout  $a$  et  $b$ . Pour résoudre le problème à coin (5.13), on peut procéder de la façon suivante. On suppose que l'on connaisse la trace de la première composante de  $u$  sur  $\partial\Omega_2$ . Alors puisque la seconde composante est transportée à vitesse entrante pour la face  $\partial\Omega_2$  et sortante pour la face  $\partial\Omega_1$ , il suffit de connaître sa trace sur  $\partial\Omega_2$  et d'intégrer le long des caractéristiques. On obtient donc :

$$u_2(t, x) = bu_{1|_{x_2=0}}(t - x_2, x_1 + x_2),$$

en particulier on connaît la valeur de la trace sur  $\partial\Omega_1$  :

$$u_2(t, 0, x_2) = bu_{1|_{x_2=0}}(t - x_2, x_2).$$

On peut alors injecter la valeur de cette trace dans la condition de bord sur la face  $\partial\Omega_1$ . Après avoir intégré le long des caractéristiques, on obtient :

$$u_1(t, x) = abu_{1|_{x_2=0}}(t - x_2 - 2x_1, x_1 + x_2) + g(t - x_1, x_1 + x_2).$$

On remarque alors que la trace  $u_{1|_{x_2=0}}$  est solution de l'équation fonctionnelle :

$$u_{1|_{x_2=0}}(t, x_1) - abu_{1|_{x_2=0}}(t - 2x_1, x_1) = g(t - x_1, x_1).$$

L'étude de cette équation, qui apparaîtra aussi dans la construction des développements BKW pour des problèmes à coin, sera faite au sous-paragraphe (6.9.5). On affirme juste ici qu'elle admet une unique solution dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  si et seulement si  $|ab| < 1$ . Pour que le problème à coin (5.13) soit fortement bien posé il faut donc que les paramètres  $a$  et  $b$  vérifient  $|ab| < 1$  et le caractère fortement bien posé n'est donc pas équivalent à imposer la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chaque face.

La solution de ce système se déplace d'un bord à l'autre en suivant les bicaractéristiques portées par les directions  $[1, -1]$  et  $[-1, 1]$ . Après un "aller-retour" la solution est amplifiée par le facteur  $ab$ . Donc instinctivement, si  $|ab| > 1$  la solution au voisinage du coin subit une très forte amplification même pour les petites valeurs de  $t$  et ne peut donc pas vérifier une estimation d'énergie sans pertes.

On en vient maintenant à décrire la nouvelle condition dans le cas général et plus particulièrement sa provenance.

Soit  $u$  une solution du problème à coin (5.10) pour lequel on choisit un terme source à l'intérieur  $f$  nul, on note  $v$  le prolongement de  $u$  par 0 aux  $x_1$  négatifs. Alors  $v$  satisfait le problème aux limites :

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 v + A_2 \partial_2 v + [\sigma + iA'(\eta)]v = A_1 \delta(x_1)u(0, x_2), & (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ B_2 v|_{x_2=0} = g_2 & x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.14)$$

Par transformée de Fourier dans la variable  $x_1$  on se ramène à étudier le problème :

$$\begin{cases} \partial_2 \hat{v} = \mathcal{A}_2(\eta_1) \hat{v} + A_2^{-1} A_1 u(0, x_2), \\ B_2 \hat{v}|_{x_2=0} = \hat{g}_2, \end{cases} \quad (5.15)$$

où l'on rappelle que  $\mathcal{A}_2(\eta_1) := \mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1) = -A_2^{-1} [\sigma + iA'(\eta) + i\eta_1 A_1]$ .

On peut décomposer  $\hat{v}$  en une partie stable et une partie instable :

$$\hat{v}(\eta_1) = \Pi_2^s(\zeta, \eta_1) \hat{v}(\eta_1) + \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) \hat{v}(\eta_1), \quad (5.16)$$

où chaque terme est donné par la formule de Duhamel :

$$\begin{aligned} \Pi_2^s(\zeta, \eta_1) \hat{v}(\eta_1, x_2) &= e^{x_2 \mathcal{A}_2(\eta_1)} \Pi_2^s(\zeta, \eta_1) \hat{v}(0) + \int_0^{x_2} e^{(x_2-s) \mathcal{A}_2(\eta_1)} \Pi_2^s(\zeta, \eta_1) A_2^{-1} A_1 u(0, s) ds \\ \Pi_2^u(\eta_1) \hat{v}(\eta_1, x_2) &= - \int_{x_2}^{+\infty} e^{(x_2-s) \mathcal{A}_2(\eta_1)} \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) A_2^{-1} A_1 u(0, s) ds \end{aligned}$$

Cependant d'après l'hypothèse 5.3.1, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme permet d'écrire :

$$\Pi_2^s(\zeta, \eta_1) \hat{v}(\eta_1, 0) = -\phi_2(\zeta, \eta_1) B_2 \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) \hat{v}(\eta_1, 0) + \phi_2(\zeta, \eta_1) \hat{g}_2(\eta_1),$$

dont on déduit que :

$$\begin{aligned}\widehat{v}(\eta_1, 0) &= [I - \phi_2(\zeta, \eta_1)B_2] \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) \widehat{v}(\eta_1, 0) + \phi_2(\zeta, \eta_1) \widehat{g}_2, \\ &= [\phi_2(\zeta, \eta_1)B_2 - I] \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}_2(\eta_1)} \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) A_2^{-1} A_1 u(0, s) ds + \phi_2(\zeta, \eta_1) \widehat{g}_2.\end{aligned}$$

Par transformée de Fourier inverse on en déduit que

$$v(x_1, 0) = (T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)u(0, \cdot))(x_1) + P_2(\zeta)g_2, \quad (5.17)$$

où

$$\begin{aligned}(T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)u)(x_1) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1 \eta_1} [\phi_2(\zeta, \eta_1)B_2 - I] \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1)} \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) A_2^{-1} A_1 u(s) ds d\eta_1. \\ (P_2(\zeta)g)(x_1) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1 \eta_1} \phi_2(\zeta, \eta_1) \widehat{g}(\eta_1) d\eta_1\end{aligned}$$

On insiste maintenant sur le fait que par construction  $v(x_1, 0) = u(x_1, 0)$  donc on a exhibé un opérateur, qui étant donné la trace sur la face  $\partial\Omega_1$  d'une solution du problème à coin (5.10) écrit pour  $f \equiv 0$  renvoie la trace de la solution sur la face  $\partial\Omega_2$ .

Si on étend maintenant  $u$  par 0 aux  $x_2$  négatifs, on peut réitérer la même construction pour aboutir à une égalité de la forme

$$u(0, x_2) = (T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u(\cdot, 0))(x_2) + (P_1(\zeta)g_1)(x_2), \quad (5.18)$$

avec :

$$\begin{aligned}(T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u)(x_2) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{ix_2 \eta_2} [\phi_1(\zeta, \eta_2)B_1 - I] \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}_1(\zeta, \eta_2)} \Pi_1^u(\zeta, \eta_2) A_1^{-1} A_2 u(s) ds d\eta_2, \\ (P_1(\zeta)g)(x_2) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{ix_2 \eta_2} \phi_1(\zeta, \eta_2) \widehat{g}(\eta_2) d\eta_2\end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $\mathcal{A}_1(\zeta, \eta_2) = -A_1^{-1} [\sigma + iA'(\eta) + i\eta_2 A_2]$ .

Par construction, l'opérateur  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  prend la trace sur la face  $\partial\Omega_2$  d'une solution du problème à coin (5.10) écrit pour  $f \equiv 0$  et fait correspondre à la trace en entrée, la trace sur la face  $\partial\Omega_1$ . Par conséquent si on compose les équations (5.17) et (5.18) on est amené à l'équation suivante :

$$[I - T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)] u(0, x_2) = (P_1(\zeta)g_1)(x_2) + (T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)P_2(\zeta)g_2)(x_2). \quad (5.19)$$

Si l'on pense que la trace de la solution doit dépendre des termes sources sur le bord, il semble naturel d'imposer l'inversibilité de l'opérateur  $[I - T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)]$  sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , c'est cette condition que l'on appelle condition au coin d'Osher. De plus, puisque si on réitère la construction précédente, mais cette fois en étendant d'abord par zéro pour les  $x_2$  négatifs l'équation (5.19) s'écrira :

$$[I - T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)] u(x_1, 0) = (P_2(\zeta)g_2)(x_1) + (T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)P_1(\zeta)g_1)(x_2).$$

Ainsi on demandera aussi l'inversibilité de l'opérateur  $[I - T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)]$  sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . Enfin comme la constante  $C$  de l'estimation d'énergie (5.11) doit être indépendante de  $\gamma$ , on imposera en plus que les bornes des opérateurs  $[I - T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)]$  et  $[I - T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)]$  et de leurs inverses soient indépendantes de  $\zeta \in \Xi$ .

Dans un souci d'allègement des notations on pose :

$$\mathbb{T}_2(\zeta) := T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)T_{2 \rightarrow 1}(\zeta), \quad (5.20)$$

$$\mathbb{T}_1(\zeta) := T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)T_{1 \rightarrow 2}(\zeta). \quad (5.21)$$

Imposer l'inversibilité des opérateurs  $[I - \mathbb{T}_1(\zeta)]$  et  $[I - \mathbb{T}_2(\zeta)]$  n'est pas rigoureux à ce stade de l'analyse puisque l'on ne sait même pas s'ils sont bornés. Cependant, la démonstration du caractère borné de ces opérateurs n'est pas triviale ; c'est pourquoi on admettra pour le moment le caractère borné de ces opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . La démonstration de ce résultat occupe le sous-paragraphe 5.5.3 de ce chapitre et nécessitera une hypothèse technique sur les matrices résolvantes  $\mathcal{A}_1(0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{R}^{d-2}}, 1) = -iA_1^{-1}A_2$  et  $\mathcal{A}_2(0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{R}^{d-2}}, 1) = -iA_2^{-1}A_1$ .

**Hypothèse 5.3.2** *Pour tout  $\zeta \in (\Xi \setminus \Xi_0)$ , les opérateurs  $[I - \mathbb{T}_2(\zeta)]$  et  $[I - \mathbb{T}_1(\zeta)]$  sont inversibles de  $L^2(\mathbb{R}_+)$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  uniformément en  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$ .*

*En particulier, pour tout  $\zeta \in (\Xi \setminus \Xi_0)$  et pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , il existe  $C_1, C_2$  des constantes positives telles que :*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 &\leq C_2 \| [I - \mathbb{T}_2(\zeta)] u \|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \\ \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 &\leq C_1 \| [I - \mathbb{T}_1(\zeta)] u \|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

L'hypothèse 5.3.2 semble être une hypothèse assez forte, surtout en ce qui concerne le caractère uniforme de la borne. En effet, si on fait le parallèle avec la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, pour obtenir le caractère uniforme de la borne, on est amené à compactifier la demi-sphère unité de  $\Xi$  en considérant fréquences de  $\Xi_0$ . Il se peut que l'on soit amené à faire de même pour obtenir une borne uniforme dans l'hypothèse 5.3.2. Toutefois, en raison des modes de glancing qui apparaissent dans  $\Xi_0$ , définir les projecteurs  $\Pi_i^u$  sur  $\Xi_0$  n'est pas clair et par conséquent, il n'est pas clair que les opérateurs  $\mathbb{T}_2(\zeta)$  et  $\mathbb{T}_1(\zeta)$  soient bien définis sur  $\Xi_0$ . Une solution pour donner un sens  $\Pi_i^u$  pour  $\zeta \in \Xi_0$  pourrait être d'utiliser des relations comme celle démontrée au lemme 5.5.1 qui permettraient d'exprimer les projecteurs  $\Pi_i^u$  en fonction des projecteurs stables associés à un problème à coin dual.

On conclut ce sous-paragraphe par un calcul explicite pour lequel il n'y a pas de modes de glancing et donc pas de problème concernant la définition de  $\mathbb{T}_2(\zeta)$  et de  $\mathbb{T}_1(\zeta)$ . Pour l'exemple (5.13) (à l'heure actuelle, il s'agit du seul exemple sur lequel on arrive à faire ces calculs) les opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  sont donnés par :

$$(T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)u)(s) = e^{-s\sigma} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} u_1 \text{ et } (T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u)(s) = e^{-s\sigma} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} u_2,$$

où l'on a posé  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ . On peut remarquer que ces deux opérateurs sont bornés uniformément par rapport au paramètre  $\zeta$ . De plus, on peut calculer

$$(\mathbb{T}_1(\zeta)u)(s) = e^{-2s\sigma} \begin{bmatrix} ab \\ b \end{bmatrix} u_1.$$

On remarque donc que sous la restriction  $|ab| < 1$ , que l'on avait faite lors de l'étude de l'exemple (5.13) au début de ce paragraphe, l'opérateur  $\mathbb{T}_1(\zeta)$  est contractant et donc que l'hypothèse 5.3.2 est satisfaite. En fait, une étude plus poussée, voir [Osh74b], montre que l'opérateur  $I - \mathbb{T}_1(\zeta)$  est inversible si et seulement si  $|ab| < 1$ .

### 5.3.3 Deux hypothèses peut-être de nature plus technique.

Tout au long de l'étude du problème à coin on aura besoin d'hypothèses supplémentaires. On distingue ces dernières de celles données dans les sous-paragraphe précédents car elles semblent être d'une nature plus technique que nécessaire. Les hypothèses techniques ajoutées sont les suivantes :

**Hypothèse 5.3.3** *Dans tout ce qui suit on supposera que  $\mathbb{R}^N = \ker B_1 \oplus \ker B_2$ . En particulier,  $N = p_1 + p_2$ .*

On retrouve aussi l'hypothèse sur les valeurs propres associées à des blocs de Jordan de la matrice  $A_1^{-1}A_2$  que l'on avait utilisé dans le chapitre 4 pour appliquer le théorème "fort=faible" de Sarason [Sar62].

**Hypothèse 5.3.4** *Les valeurs propres réelles de la matrice  $A_1^{-1}A_2$  associées à des blocs de Jordan sont strictement négatives.*

Plutôt que d'essayer de motiver ces hypothèses à ce stade de l'analyse, il nous semble plus à propos et surtout plus parlant de le faire dans le corps du texte lorsque ces dernières apparaîtront.

## 5.4 La démonstration d'Osher [Osh73].

Le théorème que l'on cherche à démontrer est le suivant :

**Théorème 5.4.1** *Sous toutes les hypothèses précédentes, pour tout  $f \in L_\gamma^2(\Omega)$ , pour tout  $(g_1, g_2) \in L_\gamma^2(\partial\Omega_1) \times L_\gamma^2(\partial\Omega_2)$ , il existe une unique solution  $u \in L_\gamma^2(\Omega)$  à trace dans  $L_\gamma^2(\partial\Omega_1) \times L_\gamma^2(\partial\Omega_2)$  du problème à coin :*

$$\begin{cases} L(\partial)u = f, & \text{dans } \Omega \\ B_1 u|_{x_1=0} = g_1, & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ B_2 u|_{x_2=0} = g_2, & \text{sur } \partial\Omega_2 \end{cases}$$

*De plus, il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $\gamma$  telle que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ ,  $u$  vérifie l'estimation d'énergie :*

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|u|_{x_1=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|u|_{x_2=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|g_1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|g_2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.3.1, on a vu qu'il était équivalent de travailler sur le problème à coin écrit sous la forme (5.10), c'est-à-dire le problème à coin obtenu après transformée de Laplace dans la variable  $t$  et transformée de Fourier dans la variable  $x'$ .

On cherche ici à adapter la démonstration du chapitre 4, du cas strictement dissipatif au cas général. Le premier point qu'il faut établir dans la démonstration du théorème 5.4.1 est donc une estimation d'énergie a priori. Comme indiqué dans au début de ce chapitre, la démonstration de l'estimation d'énergie a priori passe par la construction d'un symétriseur qui, comme le symétriseur de Kreiss, permet de compenser le manque de dissipativité sur les faces du domaine.

Une fois cette estimation d'énergie démontrée, pour conclure au caractère fortement bien, on pourrait comme au chapitre 4 construire un problème dual et supposer que ce dernier vérifie les conditions sous lesquelles on a démontrée l'estimation d'énergie a priori. Ainsi, on peut construire une solution faible exactement par la même méthode que celle décrite au chapitre 4. Puis on peut montrer l'unicité de la solution faible en utilisant le théorème "fort=faible" de Sarason [Sar62] et

conclure à l'unicité en utilisant le fait que la solution faible vérifie alors l'estimation d'énergie a priori.

Le seul bémol de cette méthode est qu'il est nécessaire de supposer que l'hypothèse 5.3.2 est vérifiée par le problème primal et par un problème dual. Comme mentionné dans l'introduction de ce manuscrit, on pense que l'hypothèse 5.3.2 est automatiquement satisfaite par le problème dual si elle l'est pour le problème primal. Ainsi, cette démonstration n'est pas en l'état très satisfaisante et on espère réussir à l'améliorer à l'avenir en montrant qu'il est suffisant de supposer que le problème primal vérifie l'hypothèse 5.3.2.

#### 5.4.1 Reduction à un problème homogène à l'intérieur.

On vient de mentionner que l'établissement de l'estimation d'énergie a priori nécessitait la construction d'un symétriseur. Or l'une des différences entre la construction du symétriseur de Kreiss (cf. [Kre70]-[BG07]-[CP81]) et le symétriseur d'Osher est que la construction du symétriseur d'Osher se fait pour des problèmes homogènes à l'intérieur du domaine.

C'est pourquoi, dans un premier temps, on se ramène à un problème à coin homogène à l'intérieur du domaine. Pour cela, on utilise le caractère fortement bien posé du problème à coin symétrique avec conditions de bord strictement dissipatives que l'on a démontré au chapitre précédent.

**Proposition 5.4.1** *Si le problème à coin (5.1) est non caractéristique à coefficients symétriques et qu'il vérifie l'hypothèse 5.3.4, alors le problème à coin (5.10) admet une unique solution  $u \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$  à traces  $L^2(\mathbb{R}_+)$  satisfaisant l'estimation d'énergie (5.11) si et seulement si le problème à coin homogène à l'intérieur :*

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 w + A_2 \partial_2 w + [\sigma + iA'(\eta)] w = 0, \text{ pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \\ B_1 w|_{x_1=0} = g_1, \text{ pour } x_2 \in \mathbb{R}_+, \\ B_2 w|_{x_2=0} = g_2, \text{ pour } x_1 \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (5.22)$$

admet une unique solution  $w \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$  à traces dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  qui satisfait l'estimation d'énergie suivante :

$$\|w|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|w|_{x_2=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C \left( \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|g_2\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \right). \quad (5.23)$$

**Démonstration :** Seul le caractère suffisant nécessite une démonstration.

Comme indiqué dans le paragraphe 4.1.1, il est toujours possible de trouver deux matrices  $\tilde{B}_1 \in \mathbf{M}_{p_1 \times N}(\mathbb{R})$  et  $\tilde{B}_2 \in \mathbf{M}_{p_2 \times N}(\mathbb{R})$  telles que les conditions de bords associées soient strictement dissipatives au sens de la définition 4.1.1.

On considère le problème à coin auxiliaire :

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 v + A_2 \partial_2 v + [\sigma + iA'(\eta)] v = f, \text{ pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \\ \tilde{B}_1 v|_{x_1=0} = 0, \text{ pour } x_2 \in \mathbb{R}_+, \\ \tilde{B}_2 v|_{x_2=0} = 0, \text{ pour } x_1 \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (5.24)$$

D'après le théorème 4.2.1, le problème (5.24) admet une unique solution  $v$  qui satisfait l'estimation d'énergie :

$$\gamma \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|v|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|v|_{x_2=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \frac{C}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (5.25)$$

Soit  $w$  la solution du problème à coin homogène à l'intérieur (5.22), alors  $u = v + w$  est solution du problème à coin avec termes sources  $\tilde{g}_i := g_i - B_i v|_{x_i=0}$ :

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u + [\sigma + iA'(\eta)] u = f, \text{ pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \\ B_1 u|_{x_1=0} = \tilde{g}_1, \text{ pour } x_2 \in \mathbb{R}_+, \\ B_2 u|_{x_2=0} = \tilde{g}_2, \text{ pour } x_1 \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (5.26)$$

D'après l'inégalité triangulaire  $u$  vérifie l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|u|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 &+ \|u|_{x_2=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ &\leq \gamma \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|v|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|v|_{x_2=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ &+ \gamma \|w\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|w|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|w|_{x_2=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Donc il existe une solution au problème à coin (5.10). Cette solution vérifiant l'inégalité d'énergie (5.27), elle est unique. Or  $w$  vérifie l'estimation d'énergie (5.23) et  $v$  satisfait l'estimation d'énergie (5.25), le membre de droite de l'inégalité précédente se majore par

$$C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|g_2\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \right),$$

et l'on obtient bien l'estimation d'énergie attendue pour  $u$ .

□

#### 5.4.2 Estimation d'énergie a priori et symétriseur.

On veut démontrer le théorème suivant :

**Théorème 5.4.2** *Sous toutes les hypothèses de ce chapitre, toute solution régulière  $u$  du problème à coin (5.1) vérifie l'estimation d'énergie :  $\forall \gamma \geq \gamma_0 > 0$ ,*

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 &+ \|u|_{x_1=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|u|_{x_2=0}\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \\ &\leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|g_1\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_1)}^2 + \|g_2\|_{L_\gamma^2(\partial\Omega_2)}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $\gamma$ .

La démonstration du théorème 5.4.2 passe par l'introduction d'un symétriseur qui comme dans le cas du problème aux limites standard doit vérifier des propriétés assurant que l'estimation d'énergie (5.28) ait lieu. La construction du symétriseur d'Osher se fait dans les variables polaires<sup>1</sup>. En effet, ce changement de variable a l'avantage de pouvoir ramener l'étude du comportement de la solution sur les bords du domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire l'étude de la trace en  $x_1 = 0$  et de la trace en  $x_2 = 0$ , à l'étude des deux traces de la solution par rapport à sa variable angulaire  $\theta$  seulement.

C'est pourquoi, avant de décrire les propriétés que l'on va imposer au symétriseur, on va décrire l'influence du passage en coordonnées polaires sur le problème à coin ((5.10)).

Dans les coordonnées polaires  $(\theta, r) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+$ , on a les relations,

$$A_1 \partial_1 = \cos \theta A_1 \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta A_1 \partial_\theta, \text{ et } A_2 \partial_2 = \sin \theta A_2 \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta A_2 \partial_\theta.$$

Donc le problème à coin (5.22) s'écrit dans les variables polaires sous la forme :

$$\begin{cases} [A_2 \cos \theta - A_1 \sin \theta] \partial_\theta u + Mu = 0, & (\theta, r) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+, \\ B_1 u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = g_1, & r \in \mathbb{R}_+, \\ B_2 u|_{\theta=0} = g_2, & r \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (5.29)$$

<sup>1</sup>Dans [Osh73], le changement de variables contient aussi une dilatation de la variable de distance  $r$  de la forme  $r = e^{-\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ce changement de variable supplémentaire ne nous semble pas utile, c'est pourquoi on ne le reproduit pas ici.



où l'on a posé,

$$M := M(\zeta, \theta, r) = ([A_2 \sin \theta + A_1 \cos \theta] r \partial_r + [\sigma + iA'(\eta)] r). \quad (5.30)$$

Les conditions que l'on veut être satisfaites par le symétriseur sont les suivantes et sont assez ressemblantes à celles que l'on impose au symétriseur de Kreiss. En effet, on retrouve des conditions de coercivité sur le bord du domaine (conditions *iv*) et *v*) du théorème suivant), une "symétrisation" de l'équation d'évolution (condition *i*) et *iii*)) ainsi qu'un caractère borné (voir *ii*)) du symétriseur.

Toutefois, puisque le terme  $M$  qui apparait dans l'équation d'évolution du problème à coin (5.29) n'est pas une matrice mais un opérateur, le symétriseur d'Osher sera lui aussi un opérateur.

**Théorème 5.4.3** *Sous toutes les hypothèses de ce chapitre, il existe un opérateur  $\mathcal{S}(\zeta, \theta)$  qui vérifie les propriétés suivantes.*

*i)  $\mathcal{S}(\zeta, \theta) [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta]$  est un opérateur symétrique sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , i.e.*

$$(\mathcal{S}(\zeta, \theta) [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta])^* = \mathcal{S}(\zeta, \theta) [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta].$$

*ii)  $\mathcal{S}(\zeta, \theta)$  est un opérateur borné de  $L^2(\mathbb{R}_+)$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , uniformément par rapport à  $(\zeta, \theta)$ . En d'autres termes,  $\forall \gamma > 0, \exists C > 0$  telle que*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}_+), \|\mathcal{S}(\zeta, \theta)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

*où la constante  $C$  est indépendante de  $\zeta$  et de  $\theta$ .*

*iii)  $\mathcal{S}$  vérifie l'équation différentielle*

$$\frac{1}{2} \partial_\theta (\mathcal{S}(\zeta, \theta) [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta]) + \text{Re} (\mathcal{S}(\zeta, \theta)M) = 0. \quad (5.31)$$

*iv) Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , il existe deux constantes  $c_1, C_1 > 0$  indépendantes de  $\zeta$  telles que :*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}_+), \left\langle u, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 u \right\rangle \geq c_1 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 - C_1 \|B_1 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2. \quad (5.32)$$

*v) Pour  $\theta = 0$ , il existe deux constantes  $c_2, C_2 > 0$  indépendantes de  $\zeta$  telles que :*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}_+), \langle u, \mathcal{S}(\zeta, 0) A_2 u \rangle \geq c_2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 - C_2 \|B_2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2. \quad (5.33)$$

**Remarque** Le fait que l'on ait appelé "théorème" l'énoncé précédent est légèrement abusif. En effet, comme on l'a déjà mentionné, on n'a pas, à l'heure actuelle de démonstration complète de ce résultat car le caractère uniformément borné de  $\mathcal{S}$  (cf. *ii*)) reste à être démontré. On sait toutefois que si l'hypothèse 5.3.2 est vérifiée et si de plus les opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  sont bornés uniformément par rapport à  $\zeta$ , alors le point *ii*) sera vérifié. On renvoie au sous-paragraphe 5.5.3 pour une étude des opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$ .

### 5.4.3 Démonstration du théorème 5.4.2 en utilisant le symétriseur.

Le but de ce paragraphe est de montrer comment l'existence d'un symétriseur qui vérifie les conditions décrites dans le théorème 5.4.3 permet de démontrer l'estimation d'énergie a priori du théorème 5.4.2.

L'un des principaux points de divergence entre la démonstration de l'estimation d'énergie a priori donnée par Osher [Osh73] et celle pour le problème aux limites donnée par Kreiss [Kre70] est que la complexité de l'équation résolvante (5.10) est plus importante dans le cas du problème à coin.

Cela vient principalement du fait que pour le symétriseur de Kreiss, l'équation qui gère le comportement de la solution à l'intérieur du domaine est de nature algébrique alors que l'équation qui gère l'intérieur du domaine pour le symétriseur d'Osher (cf. le point *iii*) du théorème 5.4.3) est une équation aux dérivées partielles dans les variables polaires  $\theta$  et  $r$ . Le fait de s'être ramené à un terme source nul à l'intérieur a donc eu pour effet de rendre cette équation aux dérivées partielles homogène et permet d'en donner des solutions particulières sous une forme plus simple que dans le cas non homogène. Comme on le verra dans la construction du symétriseur, ces solutions particulières seront importantes.

**Démonstration :** D'après la proposition 5.4.1, le théorème 5.4.2 est démontré si et seulement si toute solution régulière du problème

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 w + A_2 \partial_2 w + [\sigma + iA'(\eta)] w = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+^2, \\ B_1 w|_{x_1=0} = g_1, & \text{sur } \{x_1 = 0\}, \\ B_2 w|_{x_2=0} = g_2, & \text{sur } \{x_2 = 0\}, \end{cases}$$

vérifie l'estimation d'énergie :

$$\|w|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|w|_{x_2=0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C \left( \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \|g_2\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \right). \quad (5.34)$$

On va donc montrer que le symétriseur  $\mathcal{S}$  défini dans le théorème 5.4.3 permet justement d'établir l'estimation (5.34).

Passant en coordonnées polaires, on considère donc une solution régulière  $w$  du problème à coin (5.29). Un simple calcul montre alors que :

$$\begin{aligned} \partial_\theta \langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} &= \langle \partial_\theta w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &+ \langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] \partial_\theta w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &+ \langle w, \partial_\theta (\mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2]) w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

Grâce au point *i*) du théorème 5.4.3 on peut écrire :

$$\begin{aligned} \partial_\theta \langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} &= 2 \operatorname{Re} \langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] \partial_\theta w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &+ \langle w, \partial_\theta (\mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2]) w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

Grâce au point *iii*) du théorème 5.4.3 et comme  $w$  est une solution de (5.29), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \partial_\theta \langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} &= 2 \langle w, \operatorname{Re} (\mathcal{S}(\zeta, \theta) M) w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &- 2 \langle w, \operatorname{Re} (\mathcal{S}(\zeta, \theta) M) w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on intègre l'équation précédente par rapport à la variable  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial_\theta \langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] w \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} d\theta = 0,$$

et d'après la formule de Green :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left\langle w|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 w|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \right\rangle dr + \int_{\mathbb{R}_+} \left\langle w|_{\theta=0}, \mathcal{S}(\zeta, 0) A_2 w|_{\theta=0} \right\rangle dr = 0.$$

On utilise ensuite les points *iv*) et *v*) du théorème 5.4.3 pour obtenir que :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |w|_{\theta=\frac{\pi}{2}}|^2 dr + \int_{\mathbb{R}_+} |w|_{\theta=0}|^2 dr \leq C \left( \int_{\mathbb{R}_+} |B_1 w|_{\theta=\frac{\pi}{2}}|^2 dr + \int_{\mathbb{R}_+} |B_2 w|_{\theta=0}|^2 dr \right).$$

On repasse ensuite dans les coordonnées cartésiennes. On a bien démontré que toute solution assez régulière du problème à coin (5.22) vérifie l'estimation d'énergie (5.23).

□

## 5.5 Construction du symétriseur.

On cherche un symétriseur  $\mathcal{S}$  sous la forme :

$$\mathcal{S}(\zeta, \theta) = [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] J(\zeta, \theta) N(r, \zeta) J^*(\zeta, \theta), \quad (5.35)$$

où  $J$  et  $N$  sont des opérateurs qui d'après la condition *ii*) du théorème 5.4.3 devront être bornés sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . On insiste ici sur le fait que l'opérateur  $N$  est indépendant de la variable  $\theta$ , ce détail aura son importance lorsqu'il s'agira de vérifier le point *iii*) du théorème 5.4.3.

On peut aussi remarquer que d'après l'hypothèse 5.3.4 sur les valeurs propres de la matrice  $A_2^{-1}A_1$ , la matrice  $[\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2]$  est inversible pour tout  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . C'est en effet trivial pour  $\theta$  valant 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ . Pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , l'inversibilité de  $[\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2]$  est équivalente à l'inversibilité de  $I - \tan \theta A_2^{-1}A_1$ . Or, si  $I - \tan \theta A_2^{-1}A_1$  n'est pas inversible alors  $\frac{1}{\tan \theta}$  est une valeur propre strictement positive  $A_2^{-1}A_1$ , ce qui est exclu par l'hypothèse 5.3.4.

Par construction et d'après l'hypothèse de symétrie des matrices  $A_j$ , il est clair qu'un opérateur  $\mathcal{S}$  choisi sous la forme (5.35) vérifie la condition *i*) du théorème 5.4.3, c'est-à-dire que  $\mathcal{S} [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2]$  est automatiquement un opérateur symétrique.

La construction du symétriseur se fait en deux temps. Dans un premier temps, on construit l'opérateur  $J$  de manière à ce que  $\mathcal{S}$  vérifie le point *iii*) du théorème 5.4.3. Ce choix de  $J$  peut se faire indépendamment de l'opérateur  $N$  grâce au fait que  $N$  ne dépend pas de la variable angulaire  $\theta$ . Ensuite l'opérateur  $J$  étant fixé on va venir choisir un opérateur  $N$  de manière à ce que les conditions de coercivité sur le bord (conditions *iv*) et *v*) du théorème 5.4.3) soient vérifiées.

### 5.5.1 Construction de l'opérateur $J$ .

#### Résolution de l'équation d'évolution.

On veut que le symétriseur  $\mathcal{S}$  vérifie la condition *iii*) du théorème 5.4.3, c'est-à-dire, qu'il soit une solution particulière de l'équation différentielle

$$\frac{1}{2} \partial_\theta (\mathcal{S} [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta]) + \text{Re} (\mathcal{S} M) = 0. \quad (5.36)$$

On suppose que  $J$ , apparaissant dans l'expression (5.35), est un opérateur solution de l'équation différentielle

$$\partial_\theta ([\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] J) + M^* J = 0. \quad (5.37)$$

Alors  $\mathcal{S}$  défini par (5.35) est une solution particulière de (5.36). En effet, on calcule alors

$$\begin{aligned} \partial_\theta (\mathcal{S} [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta]) &= \partial_\theta ([\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] J) N J^* [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] \\ &+ [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] J N \partial_\theta (J^* [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2]), \end{aligned}$$

où l'on utilise fortement le fait que  $N$  est indépendant de  $\theta$ . De plus, puisque  $J$  vérifie (5.37),  $J^*$  satisfait :

$$\partial_\theta (J^* [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2]) + J^* M = 0. \quad (5.38)$$

Puisque  $J$  et  $J^*$  vérifient les équations (5.37) et (5.38) il vient :

$$\begin{aligned} \partial_\theta (\mathcal{S} [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta]) &= - M^* J N J^* [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] \\ &- [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] J N J^* M. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\partial_\theta (\mathcal{S} [A_1 \sin \theta - A_2 \cos \theta]) &= -M^* \mathcal{S} - \mathcal{S}^* M, \\ &= -2\operatorname{Re}(\mathcal{S} M),\end{aligned}$$

ainsi  $\mathcal{S}$  est bien une solution particulière de l'équation différentielle (5.36).

On s'est donc ramené à construire un opérateur  $J$  qui satisfait l'équation différentielle (5.37). Pour des raisons qui seront rendues explicites par la suite, on va d'abord construire un opérateur  $K$  qui s'écrit sous la forme :

$$K(\zeta, \theta) = K_1(\zeta, \theta) + K_2(\zeta, \theta), \quad (5.39)$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des opérateurs qui sont tous les deux solutions de l'équation (5.37). Une fois les opérateurs  $K_1$  et  $K_2$  déterminés, on les modifiera légèrement en des opérateurs  $J_1$  et  $J_2$  et on posera

$$J(\zeta, \theta) := J_1(\zeta, \theta) + J_2(\zeta, \theta).$$

Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , on pose  $w(r, \theta) := (K(\theta)v)(r)$  où  $K$  est un opérateur qui doit être choisi de manière à ce que  $w$  vérifie l'équation différentielle (5.37). Repassant en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire que si l'on pose

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) := w(r, \theta),$$

par un calcul similaire à celui effectué dans la partie 5.4.2, on remarque que  $u$  est une solution de l'équation d'évolution :

$$A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u + [-\bar{\sigma} + iA'(\eta)] u = 0, \text{ sur } \mathbb{R}_+^2. \quad (5.40)$$

L'idée principale du reste de cette construction est de regarder ce problème posé dans un domaine à coin comme deux problèmes d'évolution posés chacun dans un demi-espace. En effet, la formule de Duhamel fournit des solutions de ces problèmes aux limites à condition de connaître leur trace sur le bord du demi-espace. Ici, cette trace sera donnée par la fonction  $v \in L^2(\mathbb{R}_+)$  sur laquelle agit l'opérateur solution  $K$  et sera donc une donnée connue du problème. On fixe donc une fonction  $v \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , on l'étend par zéro pour les  $x_2$  négatifs, et on s'intéresse au problème aux limites :

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u + [-\bar{\sigma} + iA'(\eta)] u = 0, & \text{sur } x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R} \\ u|_{x_1=0} = v. \end{cases} \quad (5.41)$$

Par transformée de Fourier dans la variable  $x_2$ , on peut réécrire ce système sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_1 \hat{u} = \mathcal{A}_1(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_2) \hat{u}, \\ \hat{u}|_{x_1=0} = \hat{v}. \end{cases} \quad (5.42)$$

On note  $\tilde{E}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2)$  (resp.  $\tilde{E}_1^u(\sigma, \eta, \eta_2)$ ) le sous-espace stable (resp. instable) associé à la matrice  $\mathcal{A}_1(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_2)$  et  $\tilde{\Pi}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2)$  (resp.  $\tilde{\Pi}_1^u(\sigma, \eta, \eta_2)$ ) le projecteur sur  $\tilde{E}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2)$  (resp.  $\tilde{E}_1^u(\sigma, \eta, \eta_2)$ ), associé à la décomposition :

$$\mathbb{C}^N = \tilde{E}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2) \oplus \tilde{E}_1^u(\sigma, \eta, \eta_2).$$

D'après la formule de Duhamel, la fonction

$$\hat{u}(x_1) := e^{x_1 \mathcal{A}_1(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_2)} \tilde{\Pi}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2) \hat{v}(\eta_2),$$

est une solution de (5.42). Par transformée de Fourier inverse, la fonction

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_2 \eta_2} e^{x_1 \mathcal{A}_1(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_2)} \tilde{\Pi}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2) \hat{v}(\eta_2) d\eta_2,$$

est donc une solution de (5.42) sur  $\{x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$ . On peut ensuite restreindre cette solution aux  $x_2$  positifs, pour obtenir une solution de (5.40) sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

On revient maintenant dans les variables polaires, la fonction  $w$  définie sur  $\{r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$  par :

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir \sin \theta \eta_2} e^{r \cos \theta A_1(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_2)} \tilde{\Pi}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2) \hat{v}(\eta_2) d\eta_2,$$

est donc une solution de l'équation (5.37). Ainsi, l'opérateur  $K_1(\theta)$  défini par :

$$(K_1(\zeta, \theta)v)(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir \sin \theta \eta_2} e^{r \cos \theta A_1(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_2)} \tilde{\Pi}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2) \hat{v}(\eta_2) d\eta_2 \quad (5.43)$$

satisfait l'équation différentielle (5.37).

Si l'on considère maintenant le problème aux limites posé dans l'autre demi-espace *i.e.* le problème :

$$\begin{cases} A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u + [-\bar{\sigma} + iA'(\eta)] u = 0, \text{ sur } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0 \\ u|_{x_2=0} = v, \end{cases}$$

on peut alors en réitérant exactement la même méthode (à ceci près que la transformée de Fourier se fait maintenant sur la variable  $x_1$ ) construire un second opérateur solution  $K_2(\zeta, \theta)$  donné par la formule :

$$(K_2(\zeta, \theta)v)(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir \cos \theta \eta_1} e^{r \sin \theta A_2(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_1)} \tilde{\Pi}_2^s(\sigma, \eta, \eta_1) \hat{v}(\eta_1) d\eta_1, \quad (5.44)$$

tel que  $(K_2(\theta)v)$  soit une solution de l'équation différentielle (5.37) pour tout  $v \in L^2(\mathbb{R}_+)$ .

Par conséquent l'opérateur  $K$  défini en (5.39), avec  $K_1$  et  $K_2$  définis en (5.43) et (5.44) est bien une solution de l'équation différentielle (5.37). Donc un symétriseur  $\mathcal{S}$  s'écrivant sous la forme (5.35) (avec  $J = K$ ) vérifie le point *iii*) du théorème (5.4.3) indépendamment du choix de  $N$ .

### Calcul des opérateurs adjoints de $K_1$ et de $K_2$ .

Dans le sous-paragraphe précédent on a construit une solution de (5.37) ; il reste maintenant à vérifier que l'on peut choisir  $N$  de manière à assurer les conditions de coercivité *iv*) et *v*) du théorème (5.4.3).

Mais avant cela on va calculer les opérateurs  $K_1(\zeta, \theta)^*$  et  $K_2(\zeta, \theta)^*$  pour  $\theta$  dans  $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ .

Ce calcul est motivé par le fait que les conditions de coercivité *iv*) et *v*) du théorème (5.4.3), s'écrivent sous la forme :

$$\langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) A_i w \rangle \geq c_i |w|^2 - C_i |B_i w|^2, \quad (5.45)$$

où  $i \in \{1, 2\}$  et  $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$ . Pour  $\mathcal{S}(\zeta, \theta)$  écrit sous la forme (5.35), où  $J = K$  est l'opérateur construit dans le paragraphe précédent, le membre de gauche de (5.45) se réécrit sous la forme : pour  $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$ ,

$$\langle w, \mathcal{S}(\zeta, \theta) A_i w \rangle = \langle w, [\sin \theta A_1 - \cos \theta A_2] K(\zeta, \theta) N K(\zeta, \theta)^* A_i w \rangle.$$

En évaluant cette équation en  $\frac{\pi}{2}$  et 0, on obtient alors le couple d'inégalités :

$$\begin{cases} \langle K(\zeta, \frac{\pi}{2})^* A_1 w, N K(\zeta, \frac{\pi}{2})^* A_1 w \rangle \geq c_1 |w|^2 - C_1 |B_1 w|^2, \\ \langle K(\zeta, 0)^* A_2 v, N K(\zeta, 0)^* A_2 v \rangle \leq -c_2 |w|^2 + C_2 |B_2 w|^2, \end{cases} \quad (5.46)$$

qui montre bien que les opérateurs adjoints de  $K_1$  et de  $K_2$  apparaissent naturellement dans les conditions de bords.

De plus connaître les valeurs précises des opérateurs adjoints permettra aussi de savoir comment modifier la définition des opérateurs  $K_1$  et  $K_2$ , en des opérateurs  $J_1$  et  $J_2$ , de manière à faire apparaître les opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}$  et  $T_{2 \rightarrow 1}$  dans les conditions de coercivité (5.46). Ce point sera capital lors du choix de  $N$  car il permettra d'utiliser la condition d'Osher (cf. hypothèse 5.19).

On calculera ici ces opérateurs seulement dans le cas  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , les calculs pour  $\theta = 0$  étant similaires. On doit donc calculer  $K_1 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right)^*$  et  $K_2 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right)^*$ .

Après avoir posé  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dans les équations (5.43) et (5.44) il vient :

$$\left( K_1 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right) v \right) (r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir\eta_2} \tilde{\Pi}_1^s(\sigma, \eta, \eta_2) \hat{v}(\eta_2) d\eta_2, \quad (5.47)$$

$$\left( K_2 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right) v \right) (r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{r\mathcal{A}_2(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_1)} \tilde{\Pi}_2^s(\sigma, \eta, \eta_1) \hat{v}(\eta_1) d\eta_1. \quad (5.48)$$

On commence par calculer l'adjoint de  $K_1 \left( \frac{\pi}{2} \right)$ . Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , étendue par zéro sur  $\mathbb{R}_-$  ; d'après l'équation (5.47) et la formule de Parseval on a :

$$\begin{aligned} \left\langle K_1 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right) v, u \right\rangle &= \left\langle \mathcal{F}^{-1} \tilde{\Pi}_1^s \mathcal{F} v, u \right\rangle, \\ &= \left\langle v, \mathcal{F}^{-1} \tilde{\Pi}_1^{s,*} \mathcal{F} u \right\rangle, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  sont des notations pour la transformée de Fourier et son inverse. On en déduit que

$$\left( K_1 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right)^* u \right) (r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir\eta_2} \tilde{\Pi}_1^{s,*}(\sigma, \eta, \eta_2) \hat{u}(\eta_2) d\eta_2. \quad (5.49)$$

Pour rendre cette équation plus explicite, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 5.5.1** *Pour  $i = 1, 2$ , on a*

$$\tilde{\Pi}_i^{s,*}(\sigma, \eta, \eta_{3-i}) = A_i \Pi_i^u(\sigma, \eta, \eta_{3-i}) A_i^{-1},$$

**Démonstration :** On fait la démonstration pour  $i = 1$ , le cas  $i = 2$  étant totalement analogue. On commence par démontrer que

$$\tilde{E}_i^s(\sigma, \eta, \eta_{3-i}) = (A_i E_i^s(\sigma, \eta, \eta_{3-i}))^\perp.$$

Dans un souci d'allégement des notations, on ne spécifie pas les paramètres  $\sigma$ ,  $\eta$  et  $\eta_2$  dans les expressions des sous-espaces  $\tilde{E}_i^s$  et  $E_i^s$ .

Soit  $v \in \tilde{E}_1^s$  et  $u \in E_1^s$ , alors par définition des sous-espaces stables on a :

$$A_1 \partial_1 u = \mathcal{A}_1(\sigma, \eta, \eta_2) u, \text{ et } A_1 \partial_1 v = \mathcal{A}_1(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_2) v.$$

Ces deux équations permettent alors de démontrer que  $\partial_1 \langle v, A_1 u \rangle = 0$ . Or, si  $u \in E_1^s$  et  $v \in \tilde{E}_1^s$ , alors par définition  $\langle v, A_1 u \rangle$  décroît exponentiellement vite lorsque  $x_1$  tend vers  $+\infty$ . On déduit que si  $u \in E_1^s$ ,  $v \in \tilde{E}_1^s$  alors  $\langle v, A_1 u \rangle = 0$ .

Reprenant la même méthode mais en évaluant en  $x_1$  tendant vers  $-\infty$ , on montre que

$$\tilde{E}_i^u = (A_i E_i^u)^\perp.$$

On utilise ensuite les relations :

$$\begin{aligned}\ker \tilde{\Pi}_1^{s,*} &= \left( \operatorname{Im} \tilde{\Pi}_1^s \right)^\perp = A_1 E_1^s, \\ \operatorname{Im} \tilde{\Pi}_1^{s,*} &= \left( \ker \tilde{\Pi}_1^s \right)^\perp = A_1 E_1^u,\end{aligned}\tag{5.50}$$

pour montrer que les noyaux et les images des projecteurs  $\tilde{\Pi}_1^{s,*}$  et  $A_1 \Pi_1^u A_1^{-1}$  sont égaux.

□

Ce lemme permet d'écrire :

$$\left( K_1 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right)^* u \right) (r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir\eta_2} A_1 \Pi_1^u(\sigma, \eta, \eta_2) A_1^{-1} \hat{u}(\eta_2) d\eta_2.\tag{5.51}$$

Le calcul de  $K_2(\frac{\pi}{2})^*$  suit la même philosophie à ceci près qu'il faut gérer en plus l'exponentielle matricielle. La formule de Parseval donne :

$$\begin{aligned}\left\langle K_2 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right) v, u \right\rangle &= \left\langle \mathcal{F}^{-1} e^{r\mathcal{A}_2(-\bar{\sigma})} \tilde{\Pi}_2^s \mathcal{F} v, u \right\rangle, \\ &= \left\langle v, \mathcal{F}^{-1} \tilde{\Pi}_2^{s,*} e^{r\mathcal{A}_2(-\bar{\sigma})^*} \mathcal{F} u \right\rangle,\end{aligned}$$

dont on déduit que

$$\begin{aligned}\left( K_2 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right)^* u \right) (r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir\eta_1} \tilde{\Pi}_2^{s,*}(\sigma, \eta, \eta_1) e^{r\mathcal{A}_2(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_1)^*} \hat{u}(\eta_1) d\eta_1, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ir\eta_1} e^{r\mathcal{A}_2(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_1)^*} \tilde{\Pi}_2^{s,*}(\sigma, \eta, \eta_1) \hat{u}(\eta_1) d\eta_1,\end{aligned}\tag{5.52}$$

où l'on a utilisé le fait que les matrices  $\tilde{\Pi}_2^s$  et  $e^{r\mathcal{A}_2}$  commutent.

Or,

$$\begin{aligned}e^{r\mathcal{A}_2(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_1)^*} &= e^{r[\sigma + iA'(\eta) + i\eta_1 A_1] A_2^{-1}}, \\ &= A_2 e^{-r\mathcal{A}_2(\sigma, \eta, \eta_1)} A_2^{-1}.\end{aligned}$$

Utilisant le lemme 5.5.1 on a alors :

$$e^{r\mathcal{A}_2(-\bar{\sigma}, \eta, \eta_1)^*} \tilde{\Pi}_2^{s,*}(\sigma, \eta, \eta_1) = A_2 e^{-r\mathcal{A}_2(\sigma, \eta, \eta_1)} A_2^{-1} A_2 \Pi_2^u(\sigma, \eta, \eta_1) A_2^{-1}.\tag{5.53}$$

Injectant cette nouvelle égalité dans l'équation (5.52) on peut alors écrire :

$$\left( K_2 \left( \zeta, \frac{\pi}{2} \right)^* u \right) (r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} A_2 e^{ir\eta_1} e^{(-r\mathcal{A}_2(\sigma, \eta, \eta_1))} \Pi_2^u(\sigma, \eta, \eta_1) A_2^{-1} \hat{u}(\eta_1) d\eta_1.$$

Ceci conclut le calcul des opérateurs adjoints de  $K_1$  et de  $K_2$ .

On en vient maintenant à la modification des opérateurs  $K_1$  et  $K_2$  en des opérateurs  $J_1$  et  $J_2$  dont les valeurs en  $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$  dépendent des opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}$  et  $T_{2 \rightarrow 1}$ .

Pour ce faire, on remarque que multiplier à droite une solution de l'équation d'évolution (5.37) par un opérateur indépendant de  $\theta$  donne encore une solution de l'équation d'évolution (5.37). On modifie donc les opérateurs solutions  $K_1$  et  $K_2$  de (5.37) en posant :

$$J_1^*(\zeta, \theta) := \mathcal{F}^{-1} (\phi_1(\zeta) B_1 - I) A_1^{-1} \mathcal{F} K_1(\zeta, \theta)^*,\tag{5.54}$$

$$J_2^*(\zeta, \theta) := \mathcal{F}^{-1} (\phi_2(\zeta) B_2 - I) A_2^{-1} \mathcal{F} K_2(\zeta, \theta)^*,\tag{5.55}$$

de manière à avoir :

$$J_1^*(\zeta, 0)A_2 = T_{2 \rightarrow 1}, \text{ et } J_2^*\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right)A_1 = T_{1 \rightarrow 2}.$$

On pose enfin

$$J(\zeta, \theta) := J_1(\zeta, \theta) + J_2(\zeta, \theta),$$

qui est solution de l'équation (5.37). Ceci conclut la construction de l'opérateur  $J$ .

### 5.5.2 Choix de l'opérateur $N$ .

On veut maintenant choisir un opérateur  $N$  indépendant de  $\theta$  tel que l'on ait les conditions de coercivité sur le bord (points  $iv$  et  $v$ ) du théorème 5.4.3). Sous le choix de l'opérateur  $J$  fait au paragraphe précédent, ces conditions s'écrivent sous la forme :

$iv$ ) Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , il existe  $c_1, C_1 > 0$ , deux constantes indépendantes de  $\zeta$ , telles que

$$\forall w \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad \langle w, T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)^* N T_{1 \rightarrow 2}(\zeta) w \rangle \geq c_1 |w|^2 - C_1 |B_1 w|^2. \quad (5.56)$$

$v$ ) Pour  $\theta = 0$ , il existe  $c_2, C_2 > 0$ , deux constantes indépendantes de  $\zeta$ , telles que

$$\forall w \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad \langle w, T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)^* N T_{2 \rightarrow 1}(\zeta) w \rangle \leq c_2 |w|^2 - C_2 |B_2 w|^2. \quad (5.57)$$

On va commencer par remarquer qu'il suffit d'assurer  $iv$ ) (resp.  $v$ )) pour  $w \in L^2(\mathbb{R}_+, \ker B_1)$  (resp.  $w \in L^2(\mathbb{R}_+, \ker B_2)$ ).

### Réduction à un problème à conditions de bords homogènes.

On suppose que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\forall v \in L^2(\mathbb{R}_+, \ker B_1), \quad \langle T_{1 \rightarrow 2}(\zeta) v; N T_{1 \rightarrow 2}(\zeta) v \rangle \geq c |v|^2. \quad (5.58)$$

Soit  $w$  tel que  $B_1 w = g \neq 0$ . On décompose alors  $w$  de la façon suivante :

$$w := v^b + v^\sharp,$$

avec  $v^b \in L^2(\mathbb{R}_+, \ker B_1)$  et  $v^\sharp \in L^2(\mathbb{R}_+)$  vérifiant  $B_1 v^\sharp = g$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \left\langle w, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 w \right\rangle &= \left\langle v^b, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 v^b \right\rangle + 2 \operatorname{Re} \left\langle v^b, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 v^\sharp \right\rangle + \left\langle v^\sharp, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 v^\sharp \right\rangle \\ &\geq c |v^b|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\langle v^b, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 v^\sharp \right\rangle + \left\langle v^\sharp, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 v^\sharp \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.59)$$

d'après l'équation (5.58) appliquée au premier terme. On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme et l'inégalité de Young, sur les deux termes suivants pour réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\left\langle w, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 w \right\rangle \geq \frac{c}{2} |w|^2 - C |B_1 w|^2, \quad (5.60)$$

où  $C$  est une constante dépendant de la norme  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+))$  de l'opérateur  $\mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right)$ . En effet, pour gérer le terme sous la partie réelle, on écrit :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left\langle v^b, \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 v^\sharp \right\rangle &\geq -2 |v^b| \left| \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 v^\sharp \right| \\ &\geq -\frac{c}{2} |v^b|^2 - C |v^\sharp|^2 \\ &\geq -\frac{c}{2} |v^b|^2 + \frac{c}{2} |v^\sharp|^2 - \tilde{C} |B_1 w|^2. \end{aligned}$$



Un raisonnement analogue permet aussi de gérer le troisième terme de l'équation (5.59). Donc on peut considérer une condition de bord homogène sur la face  $\{\theta = 0\}$ . Ainsi, on s'est ramené à choisir un opérateur  $N$  tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} \langle J^*(\zeta, \frac{\pi}{2}) A_1 v, N J^*(\zeta, \frac{\pi}{2}) A_1 v \rangle \geq \delta |v|^2, \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}_+, \ker B_1), \\ \langle J^*(\zeta, 0) A_2 v, N J^*(\zeta, 0) A_2 v \rangle \leq -\delta |v|^2, \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}_+, \ker B_2). \end{cases} \quad (5.61)$$

On voit donc bien qu'il faut que les bornes du symétriseur  $\mathcal{S}$  soient indépendantes de la variable  $\zeta$ .

### Construction de $N$ .

On rappelle que l'on a construit deux opérateurs  $J_1^*(\zeta, \theta)$  et  $J_2^*(\zeta, \theta)$  dont les valeurs sur les faces du domaine sont :

$$\begin{aligned} J_1^*\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 &= \mathcal{F}^{-1}(\phi_1 B_1 - I) \mathcal{F} \text{ et } J_1^*(\zeta, 0) A_2 = T_{2 \rightarrow 1}, \\ J_2^*(\zeta, 0) A_2 &= \mathcal{F}^{-1}(\phi_2 B_2 - I) \mathcal{F} \text{ et } J_2^*\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) A_1 = T_{1 \rightarrow 2}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Afin de finaliser la construction du symétriseur, il reste à choisir  $N$  qui, on le rappelle, doit être indépendant de la variable angulaire  $\theta$ , et tel que l'on ait les conditions (5.61) sur les bords du domaine.

On commence par rappeler la notation suivante :

$$\mathbb{T}_1(\zeta) = T_{2 \rightarrow 1}(\zeta) T_{1 \rightarrow 2}(\zeta).$$

On cherche  $N$  sous la forme :

$$N := \Pi_{\ker B_2}^* N_{11} \Pi_{\ker B_2} + \Pi_{\ker B_1}^* N_{22} \Pi_{\ker B_1} - 2 \operatorname{Re}(\Pi_{\ker B_2}^* N_{12} \Pi_{\ker B_1}). \quad (5.63)$$

où  $\Pi_{\ker B_1}$  (resp.  $\Pi_{\ker B_2}$ ) est le projecteur sur  $\ker B_1$  (resp.  $\ker B_2$ ) associé à la somme directe

$$\mathbb{R}^N = \ker B_1 \oplus \ker B_2.$$

En particulier, c'est le seul endroit dans la démonstration où l'on aura besoin de l'hypothèse 5.3.3.

Il suffit ensuite de remarquer que  $\operatorname{Im}(T_{1 \rightarrow 2}) \subset \ker B_2$  et  $\operatorname{Im}(T_{2 \rightarrow 1}) \subset \ker B_1$  (voir (5.21)) ce qui permet de réécrire les conditions (5.61) sous la forme :

$$\begin{cases} T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)^* N_{11} T_{1 \rightarrow 2}(\zeta) + 2 \operatorname{Re}(N_{12}^* T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)) + N_{22} \geq \delta I, \\ T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)^* N_{22} T_{2 \rightarrow 1}(\zeta) + 2 \operatorname{Re}(N_{12} T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)) + N_{11} \leq -\delta I. \end{cases} \quad (5.64)$$

Sans perte de généralité, on peut aussi supposer que  $\delta = 1$ .

La suite de la construction est en tout point similaire à celle décrite par Osher dans [Osh73].

On multiplie la deuxième équation par  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)^*$  à gauche et  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  à droite et sommant les équations de (5.64) pour se ramener à une condition dépendant seulement de  $N_{12}$  et  $N_{22}$  :

$$- \mathbb{T}_1(\zeta)^* N_{22} \mathbb{T}_1(\zeta) + N_{22} + 2 \operatorname{Re}(T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)^* N_{12} [I - \mathbb{T}_1(\zeta)]) \geq I + T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)^* T_{1 \rightarrow 2}(\zeta), \quad (5.65)$$

où l'on a utilisé la relation :

$$\operatorname{Re}(N_{12}^* T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)) - T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)^* \operatorname{Re}(N_{12} T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)) T_{1 \rightarrow 2}(\zeta) = \operatorname{Re}(T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)^* N_{12} [I - \mathbb{T}_1(\zeta)]). \quad (5.66)$$

On pose ensuite  $N_{22} = I$  et on va chercher  $N_{12}$  sous la forme  $N_{12} = N_{12}(\zeta) = \frac{1}{2} V(\zeta) [I - \mathbb{T}_1(\zeta)]^{-1}$ . L'opérateur  $V(\zeta)$  étant à déterminer.

**Remarque** On insiste sur le fait qu'un tel choix de candidat pour  $N_{12}$  est rendu possible grâce à la condition au coin 5.3.2, montrant ainsi le caractère suffisant de cette condition.

L'équation (5.65) devient en termes de  $V(\zeta)$  :

$$-\mathbb{T}_1(\zeta)^*\mathbb{T}_1(\zeta) + T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*V(\zeta) + V(\zeta)^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta) \geq T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta). \quad (5.67)$$

On pose ensuite  $V(\zeta) := T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + T_{2\rightarrow 1}(\zeta)^*\mathbb{T}_1(\zeta)$ , l'équation (5.67) est alors vérifiée. Ainsi on a déterminé un couple de bons candidats pour résoudre (5.64) :

$$\begin{aligned} N_{22} &:= I, \\ N_{12} &:= \frac{1}{2} [T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + T_{2\rightarrow 1}(\zeta)^*\mathbb{T}_1(\zeta)] [I - \mathbb{T}_1(\zeta)]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Injectant ces expressions dans la deuxième équation de (5.64), on détermine  $N_{11}$  en imposant l'égalité dans la deuxième équation de (5.64). Plus précisément :

$$\begin{aligned} N_{11} = N_{11}(\zeta) &= -(I + T_{2\rightarrow 1}(\zeta)^*T_{2\rightarrow 1}(\zeta) + 2\operatorname{Re}(N_{12}T_{2\rightarrow 1}(\zeta))), \\ &= -\left(I + \operatorname{Re}\left([T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + T_{2\rightarrow 1}(\zeta)^*][I - \mathbb{T}_1(\zeta)]^{-1}T_{2\rightarrow 1}(\zeta)\right)\right) \end{aligned}$$

A ce stade il suffit de vérifier que la première condition dans (5.64) est satisfaite pour le choix de  $N_{11}$ ,  $N_{12}$  et  $N_{22}$  précédent. Le membre de gauche s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*N_{11}T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + 2\operatorname{Re}(N_{12}^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta)) + N_{22} &= -T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*[I + T_{2\rightarrow 1}(\zeta)^*T_{2\rightarrow 1}(\zeta)]T_{1\rightarrow 2}(\zeta) \\ &\quad - 2T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*\operatorname{Re}(N_{12}T_{2\rightarrow 1}(\zeta))T_{1\rightarrow 2}(\zeta) \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(N_{12}^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta)) + I \\ &= -(T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + \mathbb{T}_1(\zeta)^*\mathbb{T}_1(\zeta) - I) \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*N_{12}[I - \mathbb{T}_1(\zeta)]), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité (5.66) pour établir la deuxième égalité. Or,

$$2\operatorname{Re}(T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*N_{12}[I - \mathbb{T}_1(\zeta)]) = 2(T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + \mathbb{T}_1(\zeta)^*\mathbb{T}_1(\zeta)),$$

donc l'égalité précédente devient :

$$T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*N_{11}T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + 2\operatorname{Re}(N_{12}^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta)) + N_{22} = (T_{1\rightarrow 2}(\zeta)^*T_{1\rightarrow 2}(\zeta) + \mathbb{T}_1(\zeta)^*\mathbb{T}_1(\zeta) + I) \geq I,$$

et donc le choix de  $N_{11}$ ,  $N_{12}$  et  $N_{22}$  précédemment décrit permet bien d'assurer les deux conditions de (5.64), ce qui conclut la construction du symétriseur.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que le symétriseur que l'on a construit vérifie bien le point *ii*) du théorème 5.4.3. En d'autres termes, on veut montrer qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$  et de  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  telle que :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}_+), \|\mathcal{S}(\zeta, \theta)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Pour ce faire, on doit étudier plus précisément les opérateurs  $T_{1\rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2\rightarrow 1}(\zeta)$

### 5.5.3 Etude des opérateurs $T_{1\rightarrow 2}(\zeta)$ et $T_{2\rightarrow 1}(\zeta)$ .

Dans le sous-paragraphe précédent on a construit un symétriseur qui vérifiait les conditions *i*), *iii*), *iv*) et *v*) du théorème 5.4.3. Dans ce sous-paragraphe, on cherche à démontrer que le symétriseur  $\mathcal{S}(\zeta, \theta)$  défini en (5.35) vérifie aussi le point *ii*). En effet, ce point a été utilisé pour se ramener à

un problème à coin homogène sur les bords (cf. sous-paragraphe 5.5.2), chose qui a été nécessaire pour établir les points  $iv$ ) et  $v$ ).

On cherche donc à montrer que l'opérateur  $\mathcal{S}(\zeta, \theta)$  est borné indépendamment de  $\zeta \in \Xi \setminus \Xi_0$  et de  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . D'après l'équation (5.35) et par construction de l'opérateur  $J$ , ces deux opérateurs s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\zeta, 0) &= -A_2 [A_2^{-1}T_{2 \rightarrow 1}^*(\zeta) + J_2(\zeta, 0)] N(\zeta) [T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)A_2^{-1} + J_2^*(\zeta, 0)], \\ \mathcal{S}\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right) &= A_1 \left[A_1^{-1}T_{1 \rightarrow 2}^*(\zeta) + J_1\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right)\right] N(\zeta) \left[T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)A_1^{-1} + J_1^*\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right)\right], \end{aligned} \quad (5.69)$$

où les opérateurs  $J_2(\zeta, 0)$  et  $J_1\left(\zeta, \frac{\pi}{2}\right)$  sont bornés en tant que multiplicateurs de Fourier (cf. equation (5.62)) et d'après la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. D'après la construction de  $N(\zeta)$  faite au sous-paragraphe 5.5.2, on peut vérifier que  $N(\zeta)$  dépend uniquement des opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$ ,  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$ ,  $[I - T_{1 \rightarrow 1}(\zeta)]^{-1}$  et des projecteurs  $\Pi_{\ker B_2}$  et  $\Pi_{\ker B_1}$ . Ainsi d'après l'hypothèse 5.3.2, qui impose le caractère borné uniforme de  $[I - \mathbb{T}_1(\zeta)]^{-1}$ , une condition suffisante pour que  $N(\zeta)$  soit borné est que les opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  soient bornés. Par conséquent, d'après (5.69), une condition suffisante pour que  $\mathcal{S}(0)$  et  $\mathcal{S}\left(\frac{\pi}{2}\right)$  soient bornés indépendamment de  $\zeta$  est que les opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  le soit.

La suite de ce paragraphe est donc consacrée à l'étude des opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$ . On y montrera que sous une condition algébrique sur la matrice  $A_1^{-1}A_2$  parfaitement acceptable (au sens où cette condition est vérifiée par beaucoup de systèmes issus de la physique) les opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  sont bornés. Malheureusement, la démonstration que l'on donne ne permet pas d'établir le caractère uniforme de la borne par rapport à  $\zeta$ . Toutefois, ce résultat bien qu'incomplet est une avancée par rapport à l'état de la littérature. En effet, dans [Osh73] le caractère borné sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$  n'est pas démontré et c'est de là que proviennent les pertes de dérivées dans l'estimation.

Ainsi, si les opérateurs  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  et  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  sont bornés uniformément par rapport à  $\zeta$  alors l'estimation d'énergie est sans pertes. Le résultat suivant va dans ce sens.

**Théorème 5.5.1** *On suppose que la fréquence  $(0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{R}^{d-2}}, 1)$  n'est pas une fréquence de glancing de la matrice résolvante  $\mathcal{A}_2(\sigma, \eta, \eta_1)$ . Alors, il existe  $C_\zeta > 0$  telle que pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$  :*

$$\|T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C_\zeta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \text{ et } \|T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C_\zeta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

**Démonstration :** Il suffit de le montrer pour l'opérateur  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$ . On rappelle que ce dernier est défini par :

$$(T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)u)(x_1) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\eta_1} [\phi_2(\zeta, \eta_1)B_2 - I] \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1)} \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) A_2^{-1} A_1 u(s) ds d\eta_1.$$

Donc d'après la formule de Plancherel et la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, on a :

$$\|T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C \|S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

où l'on a posé

$$(S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u)(\eta_1) := \int_0^{+\infty} e^{-s\mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1)} \Pi_2^u(\zeta, \eta_1) A_2^{-1} A_1 u(s) ds. \quad (5.70)$$

Par conséquent, il suffit de montrer que l'opérateur  $S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  est borné de  $L^2(\mathbb{R}_+)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . La démonstration du caractère borné de  $S_{2 \rightarrow 1}$  se fait en décomposant sur les basses fréquences et sur les hautes fréquences. Pour les basses fréquences, le lemme de Hersh [Her63] assure que tous les éléments du spectre de la matrice  $\mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1)$  ont une partie réelle strictement positive. Tandis que pour les

hautes fréquences, l'homogénéité de degré un de la matrice  $\mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1)$  montre que l'on est proche de la matrice  $A_2^{-1}A_1$ . On étudie donc la contribution des modes elliptiques et des hyperboliques séparément.

Soit  $M > 0$ , un réel qui sera déterminé par la suite. On décompose

$$\|S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u\|_{L^2(\{|\eta_1| \leq M\})}^2 + \|S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u\|_{L^2(\{|\eta_1| > M\})}^2.$$

Si  $0 < |\eta_1| \leq M$ , on a  $Re\left(\frac{\sigma}{\eta_1}\right) \geq \frac{\gamma}{M} > 0$ . D'après le lemme de Hersh,  $\mathcal{A}_2$  admet un spectre de partie réelle non nulle. Par homogénéité de degré un de  $\mathcal{A}_2$  par rapport à  $\eta_1$  il vient :

$$\left| e^{-s\mathcal{A}_2(\zeta, \eta_1)} \Pi_2^u(\eta_1) \right| = \left| e^{-s\eta_1 \mathcal{A}_2\left(\frac{\sigma}{\eta_1}, \frac{\eta}{\eta_1}, \eta_1\right)} \Pi_2^u(\eta_1) \right| \leq C,$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir :

$$\|S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u\|_{L^2(\{|\eta_1| \leq M\})}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2,$$

où la constante  $C$  dépend des matrices  $A_j$  et de  $M$ .

Il reste à étudier le cas où  $|\eta_1| > M$ . On pose  $\varepsilon := \frac{\sigma}{\eta_1}$ . Par homogénéité de degré un (resp. zéro) de  $\mathcal{A}_2$  (resp.  $\Pi_2^u$ ) par rapport à  $\eta_1$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\sigma, \eta, \eta_1) &= \text{sign}(\eta_1) \eta_1 \mathcal{A}_2\left(\varepsilon, \frac{\eta}{\eta_1}, 1\right), \\ \Pi_2^u(\sigma, \eta, \eta_1) &= \text{sign}(\eta_1) \Pi_2^u\left(\varepsilon, \frac{\eta}{\eta_1}, 1\right). \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit on va traiter uniquement le cas  $\eta_1 > M$ , le cas  $\eta_1 < -M$  se traitant de façon analogue.

D'après le lemme de structure par blocs, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que si  $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$  on peut écrire :

$$\mathcal{A}_2(\varepsilon, 1) := \mathcal{A}^-(\varepsilon) \Pi^-(\varepsilon) + \mathcal{A}^+(\varepsilon) \Pi^+(\varepsilon) + \sum_{j=1}^H \lambda_j(\varepsilon) \Pi^j(\varepsilon), \quad (5.71)$$

où les  $\Pi^\pm$  sont des projecteurs réguliers bornés,  $\mathcal{A}^\pm$  des matrices régulières ayant des limites bornées notées  $\mathcal{A}_\infty^\pm$  et qui vérifient,  $sp(\mathcal{A}^\pm(\varepsilon)) \subset \{z \in \mathbb{C} \setminus \pm Re z > 0\}$ . Et où les  $\Pi^j$  sont des projecteurs bornés réguliers, les  $\lambda_j$  des fonctions bornées régulières, et où l'on a enfin posé

$$H := \# \{ \lambda \text{ valeur propre de } \mathcal{A}_2(0, 1) \setminus \lambda \in i\mathbb{R} \}.$$

On choisit donc  $M$  tel que  $M \geq \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$ , on peut alors injecter l'équation (5.71) dans l'expression de  $\|S_{2 \rightarrow 1}u\|_{L^2(\{|\eta_1| > M\})}^2$  pour obtenir :

$$\|S_{2 \rightarrow 1}(\zeta)u\|_{L^2(\{|\eta_1| > M\})}^2 \leq \|S^e u\|_{L^2(\{|\eta_1| > M\})}^2 + \|S^h u\|_{L^2(\{|\eta_1| > M\})}^2$$

où l'on a posé,

$$\begin{aligned} \|S^e u\|_{L^2(\{|\eta_1| > M\})}^2 &= \int_{\{|\eta_1| > M\}} \left| \int_0^{+\infty} e^{-s\eta_1 \mathcal{A}^+(\varepsilon)} \Pi^+(\varepsilon) A_2^{-1} A_1 u(s) ds \right|^2 d\eta_1, \\ \|S^h u\|_{L^2(\{|\eta_1| > M\})}^2 &= \int_{\{|\eta_1| > M\}} \left| \sum_{j=1}^J \int_0^{+\infty} e^{-s\eta_1 \lambda_j(\varepsilon)} \Pi^j(\varepsilon) A_2^{-1} A_1 u(s) ds \right|^2 d\eta_1, \\ &:= \int_{\{|\eta_1| > M\}} \left| \sum_{j=1}^J S_j^h u \right|^2 d\eta_1, \end{aligned}$$

où

$$J := \# \{ \lambda \text{ valeur propre de } \mathcal{A}_2(0, 1) \setminus \lambda \in i\mathbb{R} \text{ et } \partial_\gamma \lambda(0, 1) \in \mathbb{R}_+^* \}.$$

Il suffit donc de contrôler la contribution de chaque mode. On commence par étudier l'opérateur  $S^e$  qui porte les modes elliptiques.

◊ Etude de l'opérateur  $S^e$ .

Le point capital dans l'étude de l'opérateur  $S^e$  est que l'on dispose d'un bon contrôle de la partie réelle du spectre de la matrice résolvante. En effet il existe une borne inférieure de ce spectre, notée  $c$ , strictement positive :

$$\forall \eta_1 > M, \operatorname{Re}(sp(\mathcal{A}^+(\varepsilon))) \subset [c, +\infty[. \quad (5.72)$$

Ainsi on peut majorer brutalement

$$\begin{aligned} \|S^e u\|_{L^2(\{\eta_1 > M\})}^2 &\leq C_1 \int_M^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-c\eta_1 s} |u(s)| ds \right|^2 d\eta_1, \\ &\leq C_1 \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-cs} \tilde{u}(s) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \quad (5.73)$$

où  $\tilde{u}$  désigne le prolongement de  $u$  par zéro aux  $s$  négatifs et où l'on a posé

$$C_1 = \|\Pi_+\|_{L^\infty(\{\eta_1 > M\})} \|\tilde{\Pi}_2^u\|_{L^\infty(\{\eta_1 > M\})}.$$

On peut remarquer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à (5.73) abouti à l'exposant critique et ne permet donc pas de conclure. C'est pourquoi dans la suite de ce paragraphe on va appliquer le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

On définit l'opérateur  $R^e$  par :

$$(R^e u)(\eta_1) := \int_{\mathbb{R}} e^{-c\eta_1 s} \tilde{u}(s) ds.$$

Pour appliquer le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, il faut démontrer les continuités  $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  et  $L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L_*^1(\mathbb{R})$  de  $R^e$ .

◊ La continuité  $L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ .

Soit  $u \in L^1(\mathbb{R})$ , comme  $|e^{-c\eta_1 s}| \leq 1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , il vient :

$$\|R^e u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Donc  $R^e$  est uniformément continu de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

◊ La continuité  $L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L_*^1(\mathbb{R})$ .

Soit  $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} |(R^e u)(\eta_1)| &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^{+\infty} e^{-c\eta_1 s} ds \\ &\leq \frac{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{c|\eta_1|}. \end{aligned}$$

Donc, pour  $t > 0$ , on peut majorer la mesure de l'ensemble des lignes de niveaux :

$$\begin{aligned} |\{\eta_1 \in \mathbb{R}, |(R^e w)(\eta_1)| \geq t\}| &\leq \left| \left\{ \eta_1 \in \mathbb{R}, \frac{\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{c|\eta_1|} \geq t \right\} \right| \\ &\leq \frac{2}{ct} \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Par définition de la norme sur  $L_*^1(\mathbb{R})$  on a

$$\|R^e w\|_{L_*^1(\mathbb{R})} \leq \frac{2}{c} \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Donc l'opérateur  $R^e$  est continu de  $L^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L_*^1(\mathbb{R})$ .

On conclut en appliquant le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz qui donne l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $\zeta$  telle que :

$$\|R^e u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En particulier pour  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$  appliquant l'inégalité précédente au prolongement de  $u$  par zéro pour les  $s$  négatifs, on obtient :

$$\|R^e u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

ce qui démontre bien que l'opérateur  $S^e$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$  à valeurs dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

◇ Etude des modes hyperboliques :

Puisque les valeurs propres  $\lambda_j$  et les projecteurs  $\Pi^j$  sont réguliers on écrit :

$$\begin{aligned} \lambda_j(\varepsilon) &= i\lambda_j(0) + \varepsilon \partial_\gamma \lambda(0) + O(\varepsilon^2), \\ \Pi^j(\varepsilon) &= \Pi^j(0) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

où  $\lambda_j(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $\partial_\gamma \lambda(0) \in \mathbb{R}_+^*$ . On introduit ensuite

$$\tilde{S}_j^h : u \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-s\eta_1(i\lambda_j(0) + \varepsilon \partial_\gamma \lambda(0))} \Pi^j(0) A_2^{-1} A_1 u(s) ds.$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|S^h u\|_{L^2(\{\eta_1 > M\})}^2 \leq \sum_{j=1}^J \|\tilde{S}_j^h u\|_{L^2(\{\eta_1 > M\})}^2 + \|(\tilde{S}_j^h - S_j^h)u\|_{L^2(\{\eta_1 > M\})}^2.$$

Si on note  $\tilde{u}$  le prolongement de  $u$  par zéro pour les  $s$  négatifs, on peut écrire  $\tilde{S}_j^h$  sous forme de transformée de Fourier,

$$\tilde{S}_j^h u = \mathcal{F}_{s \rightarrow \lambda_j(0)\eta_1} \left( e^{-s\sigma \partial_\gamma \lambda(0)} \Pi^j(0) A_2^{-1} A_1 \tilde{u}(s) \right).$$

Par la formule de Plancherel,

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}_j^h u\|_{L^2(\{\eta_1 > M\})}^2 &\leq C \|e^{-s\sigma \partial_\gamma \lambda(0)} \Pi^j(0) A_2^{-1} A_1 \tilde{u}(s)\|_{L_s^2(\mathbb{R})}^2, \\ &\leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \end{aligned}$$

car  $\partial_\gamma \lambda(0) > 0$  vu que  $\Pi^j$  est le projecteur sur le sous-espace instable et que  $\Pi^j(0) A_2^{-1} A_1$  est borné.

Par conséquent, il suffit maintenant de contrôler le terme d'erreur  $\|(\tilde{S}_j^h - S_j^h)u\|_{L^2(\{\eta_1 > M\})}^2$  en fonction de  $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2$ . Un calcul explicite donne :

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_j^h - S_j^h)u &= \int_0^{+\infty} e^{-s(i\eta_1 \lambda_j(0) + \sigma \partial_\gamma \lambda_j(0))} \left[ e^{-s\eta_1 O(\varepsilon^2)} - 1 \right] \Pi^j(0) A_2^{-1} A_1 u(s) ds \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-s(i\eta_1 \lambda_j(0) + \sigma \partial_\gamma \lambda_j(0) - \eta_1 O(\varepsilon^2))} O(\varepsilon) A_2^{-1} A_1 u(s) ds, \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{5.74}$$

On estime ensuite chacun des termes qui constituent (5.74). Pour cela il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|I_1\|^2 &\leq C \int_{\eta_1 \geq M} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma \partial_\gamma \lambda_j(0)s} O(\varepsilon^2) dx d\eta_1 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \\ &\leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \end{aligned}$$

on rappelle que  $O(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\eta_1}\right)$  et où l'on a utilisé le fait que  $\left[e^{-s\eta_1 O(\varepsilon^2)} - 1\right] = O(\varepsilon)$ . L'estimation du terme  $I_2$  est analogue et passe aussi par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

□

**Remarque** Comme on l'a mentionné en début de paragraphe cette démonstration ne donne malheureusement pas une borne indépendante de  $\zeta$ . Puisque lors de cette démonstration on fait un découpage en hautes et basses fréquences (qui dépend forcément de  $\zeta$ ), il semble difficile d'adapter cette démonstration pour obtenir le caractère uniforme de la borne.

## 5.6 Résumé et perspectives.

### 5.6.1 Quelle hypothèse est utilisée à quel endroit ?

◊ L'hypothèse de symétrie sur les matrices  $A_j$ .

L'hypothèse de symétrie sur les coefficients du problème est une hypothèse "fil rouge" dans la construction du symétriseur. On peut penser que cette hypothèse n'est pas nécessaire. Cependant, le fait de se ramener à un problème à coin homogène à l'intérieur utilise de façon non triviale l'hypothèse de symétrie. Le point le plus gênant qui apparaît alors si l'on ôte cette hypothèse de symétrie est qu'il faut alors adapter la construction de symétriseur d'Osher à un terme source à l'intérieur du domaine,  $f$  non nul. Dans ce cadre, la complexité de la construction des opérateurs  $K_i$  (cf. le sous-paragraphe (5.5.1)) est grandement augmentée car ces opérateurs, et plus particulièrement leurs traces, dépendront de  $f$ .

◊ L'hypothèse 5.3.4.

Comme mentionné précédemment, l'hypothèse 5.3.4 est utilisée seulement pour appliquer le théorème "fort=faible" de Sarason. Il semble assez difficile de se défaire de cette hypothèse et de montrer un théorème "fort=faible" différemment de la méthode utilisée par Sarason dans [Sar62]. En effet, "l'astuce" du problème aux limites posé dans le demi-espace consistant à régulariser par une approximation de l'unité dans les variables tangentielles de manière à conserver la trace sur le bord semble inapplicable puisque une telle régularisation modifie nécessairement la valeur de la seconde trace dans le cas du problème à coin (sauf dans le cas particulier où les matrices  $A_1$  et  $A_2$  commutent cf. [Pey65]). De même la technique de Rauch [Rau85]-[Rau94], qui passe par des régularisation à poids, pour le problème caractéristique ne permet a priori pas de conserver la valeur des deux traces.

Enfin, l'idée de régulariser le coin en une courbe lisse pour se ramener à un problème aux limites posé dans un demi-espace pour lequel les conditions de bord varient traité par Rauch dans [Rau94], semble elle aussi vouée à l'échec en raison du contre-exemple dans [Moy68] qui affirme que si les deux espaces de conditions aux bord ne sont pas inclus l'un dans l'autre alors le problème est mal-posé. Or, l'hypothèse 5.3.3 empêche clairement cette inclusion.

◊ L'hypothèse 5.3.3.

L'hypothèse de non-intersection des noyaux des matrices  $B_1$  et  $B_2$  est utilisée uniquement lors de la construction de l'opérateur  $N$  (cf. le sous-paragraphe 5.5.2). Cette hypothèse n'est pas clairement écrite dans [Osh73], bien qu'elle nous semble y être utilisée. Il se peut toutefois que l'on puisse construire un symétriseur sans cette hypothèse. Toutefois étant donné que cette condition écarte assez peu (surtout quand l'un des nombres  $p_1$  ou  $p_2$  est petit) de conditions aux limites, elle nous semble être un prix très raisonnable à payer.

◊ L'hypothèse 5.2.1.

Comme dans le cas du problème aux limites, l'hypothèse de multiplicité constante est "seulement" utilisée pour obtenir le lemme de structure par blocs pour les matrices résolvantes. C'est pourquoi, on pourrait supposer à la place que l'opérateur  $L(\partial)$  est géométriquement régulier (voir [MZ05] et la définition 6.9.1).

### 5.6.2 Perspectives.

Les premières perspectives de ce chapitre consistent à finir à proprement parler la démonstration du caractère fortement bien posé du problème à coin dans le cas général. Les deux points qu'il reste à démontrer sont les suivants :

◊ Il faut d'abord démontrer que les opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  sont uniformément bornés par rapport au paramètre  $\zeta$ . Ce point permettrait de démontrer que le symétriseur est borné et fournirait alors l'estimation d'énergie a priori. De plus, cette dernière serait alors sans pertes. Les opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  ne sont pas des opérateurs pseudodifférentiels mais ce sont des opérateurs intégraux de Fourier. C'est pourquoi, une démonstration du caractère borné uniforme pourrait peut-être passer par l'étude approfondie des opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  en tant qu'opérateurs intégraux de Fourier.

◊ Il faut ensuite construire une solution faible pour le problème à coin. Il y a alors deux pistes possibles, ou bien démontrer que la condition d'Osher passe au problème dual, ou bien utiliser la condition d'Osher pour construire une solution faible "à la main". La première méthode serait préférable car elle se généraliserait aux problèmes à coefficients variables.

Une fois le caractère fortement bien posé démontré, on pense qu'il serait aussi intéressant de se pencher sur la question de la régularité de la solution du problème à coin. Plus précisément, on aimerait savoir si une régularité  $H^s$  des données du problème conduit à une régularité  $H^s$  de la solution. Ce résultat est vrai pour le problème aux limites standard.

Cependant pour les problèmes elliptiques posés dans un domaine à coins, il a été montré (voir par exemple [Gri89]-[Gri85]) que lorsque l'un des coins était un multiple rationnel de  $\pi$ , le phénomène de régularisation elliptique était moins bon que dans le cas d'un domaine régulier. Une telle perte de régularité ne serait pas anodine pour les problèmes hyperboliques puisque ces derniers n'ont aucune régularisation. Ainsi, l'on devrait être amené, lorsque l'on voudra étendre la théorie au cadre à coefficients variables, à utiliser des théorèmes de point fixe plus puissants.

Étendre le caractère fortement bien posé aux problèmes à coefficients constants, dans l'optique de pouvoir passer aux problèmes non linéaires, serait bien sûr une autre perspective. Pour cela, on pense qu'il faudra adapter la construction du symétriseur d'Osher qui utilise, de façon non triviale, le fait que les coefficients soient constants.





## Chapitre 6

# Développements d'optique géométrique pour des problèmes à coin.

### 6.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est de donner des méthodes rigoureuses pour construire des développements BKW pour des problèmes hyperboliques posés dans un domaine à coin. On étudie donc le problème à coin :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\partial)u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + A_1 \partial_1 u^\varepsilon + A_2 \partial_2 u^\varepsilon = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad t \geq 0, \\ B_1 u^\varepsilon|_{x_1=0} = g^\varepsilon, \\ B_2 u^\varepsilon|_{x_2=0} = 0, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où les matrices  $A_1, A_2$  sont des éléments de  $\mathbf{M}_N(\mathbb{R})$  et les matrices  $B_1, B_2$  sont dans  $\mathbf{M}_{p_1, N}(\mathbb{R})$  et dans  $\mathbf{M}_{p_2, N}(\mathbb{R})$  respectivement (les valeurs précises des nombres  $p_1$  et  $p_2$  seront décrites dans l'hypothèse 6.2.3).

On a ici choisi de travailler en seulement deux dimensions d'espace afin de simplifier les notations mais il n'y a a priori aucune raison de ne pas pouvoir généraliser les résultats obtenus pour un plus grand nombre de dimensions d'espace.

Ce chapitre est en un certain sens un complément au papier de Sarason et Smoller sur le sujet [SS75] dans lequel les auteurs donnent des intuitions sur comment établir des développements haute-fréquence pour (6.1) mais n'en font pas la construction rigoureuse. Comme le lecteur le verra, une part importante des idées et des exemples de ce chapitre s'inspirent des méthodes de [SS75].

Le plan sera donc le suivant : en premier lieu on expliquera le phénomène de génération des phases par rebond sur le bord du domaine. En particulier, on reprendra la discussion de [SS75] au sujet de l'importance de la géométrie de la variété caractéristique de  $L(\partial)$  sur la génération des phases. Ensuite, on donne trois exemples de développements BKW pour des systèmes n'ayant que deux équations (*i.e.* pour lesquels  $N = 2$ ,  $p_1 = p_2 = 1$ ). L'intérêt de travailler sur des exemples est que les calculs y sont totalement explicites et par conséquent cela nous semblait être une bonne entrée en matière. De plus, comme on va le voir aux paragraphes 6.3 et 6.8, la génération des phases sera plus simple dans le cas  $N = 2$  que dans le cas  $N > 2$ .

Plus précisément, les trois exemples traités sont les suivants : l'équation des ondes (cf. paragraphe 6.4), un système pour lequel la section de la variété caractéristique à  $\tau$  fixé est une ellipse

(cf. paragraphe 6.5,  $\tau$  désigne ici la fréquence temporelle) et enfin un système dont cette section est une parabole (cf paragraphe 6.6).

Pour l'équation des ondes, un rayon venant frapper une face du bord sera réfléchi et s'échappera alors vers l'infini. L'allure des bicaractéristiques pour l'équation des ondes posée dans un domaine à coin ne sera donc pas plus riche que dans un demi-espace. Pour l'ellipse, on montrera qu'il existe des rayons qui ne s'échapperont qu'après un nombre fini de rebonds strictement supérieur à un. On commencera donc à avoir un trajet des bicaractéristiques plus riche que dans le cas du demi-espace. Enfin, pour la parabole, on construira un développement BKW pour lequel le nombre de phases générées est infini et où les rayons de l'optique géométrique viennent se concentrer au coin. Ce résultat est intéressant en soi car il nous informe que ce genre de phénomène de concentration qui était attendu est effectivement possible. Mathématiquement, la principale nouvelle difficulté dans cet exemple est de donner un sens au développement BKW, dont le premier terme est une série (ceci en raison du nombre infini de phases).

Ensuite, on s'intéressera à des problèmes à coin ayant plus de deux équations pour lesquels la situation est plus compliquée et plus riche. En effet on verra que dans certains cas, en raison d'un phénomène d'autointeraction entre les phases, imposer la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chacune des faces du bord n'est plus suffisant pour construire le développement BKW. On aura besoin d'une autre condition qui semble être une version micro-localisée de la condition au coin d'Osher [Osh73]-[Osh74b] (voir aussi le sous-paragraphe 5.3.2).

L'apparition de telles versions "micro-localisées" de conditions plus générales est déjà présente pour le problème aux limites standard dans un demi-espace. Dans ce cas, le caractère fortement bien posé du problème aux limites est équivalent à la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, et l'on voit apparaître une version micro-locale de cette même condition lorsque l'on construit le développement BKW du problème.

Une fois de plus, avant de démontrer le théorème principal 6.9.2 qui montre que sous une condition idoine, il est possible de construire le développement BKW de la solution de (6.1), on a trouvé assez instructif d'exhiber cette nouvelle condition sur un exemple pour lequel tous les calculs sont explicites. Cet exemple sera traité au sous-paragraphe 6.9.1.

Enfin, dans un dernier paragraphe on étudie cette condition de résolubilité qui apparaît pour construire le développement BKW, et on montre qu'une condition suffisante pour que cette condition soit satisfaite revient à demander que le bord dissipe suffisamment d'énergie. De plus, on montre sur un exemple que cette condition de résolubilité ne découle pas de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chacune des faces du bord. Cela tend à confirmer que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chacune des faces du bord ne peut à elle seule assurer le caractère bien posé de (6.1), voir également le contre-exemple [Osh74a].

## 6.2 Quelques notations et définitions.

On pose

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\},$$

$$\partial\Omega_1 := \overline{\Omega} \cap \{x_1 = 0\}, \text{ et } \partial\Omega_2 := \overline{\Omega} \cap \{x_2 = 0\}.$$

Pour  $T > 0$ , on introduit :

$$\Omega_T := ]-\infty, T] \times \Omega, \quad \partial\Omega_{1,T} := ]-\infty, T] \times \partial\Omega_1, \text{ et } \partial\Omega_{2,T} := ]-\infty, T] \times \partial\Omega_2.$$

Dans tout ce qui suit,  $\mathcal{L}$  désigne le symbole de l'opérateur  $L(\partial)$ , i.e. pour  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{L}(\tau, \xi) := \tau + \sum_{j=1}^2 \xi_j A_j.$$

La variété caractéristique  $V$  de l'opérateur  $L(\partial)$  est alors donnée par

$$V := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid \det(\mathcal{L}(\tau, \xi)) = 0\}.$$

On se place dans la classe des opérateurs hyperboliques à multiplicité constante, c'est-à-dire que l'on suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite :

**Hypothèse 6.2.1** *Il existe un entier  $q \geq 1$ , des fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  à valeurs réelles ainsi que des entiers positifs  $\nu_1, \dots, \nu_q$  tels que*

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^1, \det \left( \tau + \sum_{j=1}^2 \xi_j A_j \right) = \prod_{k=1}^q (\tau + \lambda_k(\xi))^{\nu_k},$$

avec  $\lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_q(\xi)$ , et les valeurs propres  $\lambda_k(\xi)$  de  $\sum_{j=1}^2 \xi_j A_j$  sont semi-simples.

On fait aussi l'hypothèse que le bord de  $\Omega$  est non caractéristique :

**Hypothèse 6.2.2** *Les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont inversibles.*

On note  $p_j$  le nombre de valeurs propres positives (comptées avec la multiplicité) de la matrice  $A_j$ . Sous l'hypothèse 6.2.2, on peut définir les matrices résolvantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(\zeta) &:= -A_1^{-1}(\sigma I + i\eta A_2), \\ \mathcal{A}_2(\zeta) &:= -A_2^{-1}(\sigma I + i\eta A_1), \end{aligned}$$

où  $\zeta$  désigne un élément de l'espace des fréquences :

$$\Xi := \{\zeta = (\sigma = \gamma + i\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \gamma \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Puisque cela sera utile par la suite, on introduit aussi  $\Xi_0$  le bord de l'ensemble des fréquences  $\Xi$ , c'est-à-dire

$$\Xi_0 := \Xi \cap \{\gamma = 0\}.$$

Pour  $j = 1, 2$ ,  $\zeta \in (\Xi \setminus \Xi_0)$ , on note  $E_j^s(\zeta)$  le sous-espace stable de la matrice résolvante  $\mathcal{A}_j(\zeta)$  et  $E_j^u(\zeta)$  son sous-espace instable. Le sous-espace stable  $E_j^s(\zeta)$  est de dimension  $p_j$ , tandis que le sous-espace instable  $E_j^u(\zeta)$  est de dimension  $N - p_j$ . On rappelle le théorème suivant dû à Kreiss [Kre70] et ensuite généralisé par Métivier [Mét00] aux systèmes hyperboliques à multiplicité constante :

**Théorème 6.2.1** *Sous les hypothèses 6.2.1 et 6.2.2, pour tout  $\underline{\zeta} \in \Xi$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\zeta}$  dans  $\Xi$ , des entiers  $L_1, L_2 \geq 1$ , deux partitions  $N = \nu_{1,1} + \dots + \nu_{1,L_1} = \nu_{2,1} + \dots + \nu_{2,L_2}$  tels que  $\nu_{1,l}, \nu_{2,l} \geq 1$ , ainsi que deux matrices  $T_1, T_2$  inversibles régulières sur  $\mathcal{V}$  telles que l'on ait :*

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in \mathcal{V}, \quad T_1(\zeta)^{-1} \mathcal{A}_1(\zeta) T_1(\zeta) &= \text{diag} \left( \mathcal{A}_{1,1}(\zeta), \dots, \mathcal{A}_{1,\nu_{1,L_1}}(\zeta) \right), \\ T_2(\zeta)^{-1} \mathcal{A}_2(\zeta) T_2(\zeta) &= \text{diag} \left( \mathcal{A}_{2,1}(\zeta), \dots, \mathcal{A}_{2,\nu_{2,L_2}}(\zeta) \right), \end{aligned}$$

où les blocs  $\mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\zeta)$  sont de taille  $\nu_{j,l}$  et vérifient l'une des alternatives suivantes :

i) Tous les éléments dans le spectre de  $\mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta})$  ont une partie réelle strictement négative.

- ii) Tous les éléments dans le spectre de  $\mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta})$  ont une partie réelle strictement positive.
- iii)  $\nu_{j,l} = 1$ ,  $\mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta}) \in i\mathbb{R}$ ,  $\partial_\gamma \mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta}) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ainsi que  $\mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta}) \in i\mathbb{R}$  pour tout  $\underline{\zeta} \in \mathcal{V} \cap \Xi_0$ .
- iv)  $\nu_{j,l} > 1$ ,  $\exists k_{i_j} \in i\mathbb{R}$  tel que

$$\mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta}) = \begin{bmatrix} k_{i_j} & i & 0 \\ & \ddots & i \\ 0 & & k_{i_j} \end{bmatrix},$$

le coefficient dans le coin inférieur gauche de  $\partial_\gamma \mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta})$  est réel non nul, et de plus  $\mathcal{A}_{j,\nu_{j,l}}(\underline{\zeta}) \in i\mathbf{M}_{\nu_{i,j}}(\mathbb{R})$  pour tout  $\underline{\zeta} \in \mathcal{V} \cap \Xi_0$ .

Grâce à ce théorème on peut décrire les quatres types de fréquences possibles dans  $\Xi_0$  pour chacune des faces du bord :

**Définition 6.2.1** Pour  $j = 1, 2$ , on note :

- 1)  $\mathcal{E}_j$  l'ensemble des fréquences elliptiques c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 6.2.1 pour la matrice  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est vérifié avec des blocs de type i) et ii) seulement.
  - 2)  $\mathcal{H}_j$  l'ensemble des fréquences hyperboliques c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 6.2.1 pour la matrice  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est vérifié avec des blocs de type iii) seulement.
  - 3)  $\mathcal{EH}_j$  l'ensemble des fréquences elliptico-hyperboliques c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 6.2.1 pour la matrice  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est vérifié avec un bloc de type i), un de type ii) et au moins un bloc de type iii) mais aucun de type iv).
  - 4)  $\mathcal{G}_j$  l'ensemble des fréquences de glancing c'est-à-dire l'ensemble des  $\underline{\zeta} \in \Xi_0$  telles que le théorème 6.2.1 pour la matrice  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  est vérifié avec au moins un bloc de type iv).
- On a donc les partitions suivantes du bord de l'espace des fréquences :

$$\Xi_0 = \mathcal{E}_j \cup \mathcal{EH}_j \cup \mathcal{H}_j \cup \mathcal{G}_j.$$

L'analyse faite dans [Kre70] et dans [Mét00] permet de démontrer que les sous-espaces stables  $E_1^s(\underline{\zeta})$  et  $E_2^s(\underline{\zeta})$  admettent un prolongement par continuité sur  $\Xi_0$ . De plus si  $\underline{\zeta} \in \Xi_0 \setminus (\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$  on a la relation :

$$\mathbb{C}^N = E_1^s(\underline{\zeta}) \oplus E_1^u(\underline{\zeta}) = E_2^s(\underline{\zeta}) \oplus E_2^u(\underline{\zeta}), \quad (6.2)$$

et pour  $j \in \{1, 2\}$  :

$$\begin{aligned} E_j^s(\underline{\zeta}) &= E_j^{s,e}(\underline{\zeta}) \oplus E_j^{s,h}(\underline{\zeta}) \\ E_j^u(\underline{\zeta}) &= E_j^{u,e}(\underline{\zeta}) \oplus E_j^{u,h}(\underline{\zeta}). \end{aligned}$$

où  $E_j^{s,e}(\underline{\zeta})$  (resp.  $E_j^{u,e}(\underline{\zeta})$ ) est l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres de  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  de partie réelle strictement négative (resp. positive), et où les espaces  $E_j^{s,h}(\underline{\zeta})$  et  $E_j^{u,h}(\underline{\zeta})$  sont des sommes directes de sous-espaces propres de  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  associés à des valeurs propres imaginaires pures.

En fait, on peut donner une décomposition plus précise des espaces  $E_j^{s,h}(\underline{\zeta})$  et  $E_j^{u,h}(\underline{\zeta})$ . En effet, soit  $i\omega_{m,j}$  une valeur propre imaginaire pure de  $\mathcal{A}_j(\underline{\zeta})$  ; on a alors  $\det(\tau + \underline{\eta}A_1 + \underline{\omega}_{m,2}A_2) = \det(\tau + \underline{\omega}_{m,1}A_1 + \underline{\eta}A_2) = 0$ , et d'après l'hypothèse d'hyperbolicité à multiplicité constante, on sait qu'il existe un indice  $k_{m,j}$  tel que :

$$\tau + \lambda_{k_{m,2}}(\underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2}) = \tau + \lambda_{k_{m,1}}(\underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta}) = 0.$$

On définit alors :

**Définition 6.2.2** *L'ensemble des phases entrantes (resp. sortantes) pour la face  $\partial\Omega_1$ , noté  $\mathfrak{E}_1$  (resp.  $\mathfrak{S}_1$ ), est l'ensemble des indices  $m$  tels que la vitesse de groupe  $v_m := \nabla \lambda_{k_{m,1}}(\underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta})$  vérifie  $\partial_1 \lambda_{k_{m,1}}(\underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta}) > 0$  (resp.  $\partial_1 \lambda_{k_{m,1}}(\underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta}) < 0$ ).*

*De la même façon, l'ensemble des phases entrantes (resp. sortantes) pour la face  $\partial\Omega_2$ , noté  $\mathfrak{E}_2$  (resp.  $\mathfrak{S}_2$ ), est l'ensemble des indices  $m$  tels que la vitesse de groupe  $v_m := \nabla \lambda_{k_{m,2}}(\underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2})$  vérifie  $\partial_2 \lambda_{k_{m,2}}(\underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2}) > 0$  (resp.  $\partial_2 \lambda_{k_{m,2}}(\underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2}) < 0$ ).*

Avec cette définition on peut écrire la décomposition suivante des espaces  $E_j^{s,h}(\underline{\zeta})$  et  $E_j^{u,h}(\underline{\zeta})$  :

**Lemme 6.2.1** *Pour  $j = 1$  ou  $2$ , pour tout  $\underline{\zeta} \in \mathcal{H}_j \cup \mathcal{E}\mathcal{H}_j$ , on a*

$$E_1^{s,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{E}_1} \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta}), \quad E_1^{u,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{S}_1} \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta}), \quad (6.3)$$

$$E_1^{s,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{E}_1} A_1 \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta}), \quad E_1^{u,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{S}_1} A_1 \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\omega}_{m,1}, \underline{\eta}), \quad (6.4)$$

$$E_2^{s,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{E}_2} \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2}), \quad E_2^{u,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{S}_2} \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2}), \quad (6.5)$$

$$E_2^{s,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{E}_2} A_2 \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2}), \quad E_2^{u,h}(\underline{\zeta}) = \bigoplus_{m \in \mathfrak{S}_2} A_2 \ker \mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\eta}, \underline{\omega}_{m,2}), \quad (6.6)$$

On renvoie par exemple à [CG10] pour une démonstration de ce lemme.

Enfin, on donne les différentes conditions que doivent satisfaire les matrices intervenant dans les conditions de bord sur les faces  $\partial\Omega_1$ ,  $\partial\Omega_2$ . En premier lieu,

**Hypothèse 6.2.3** *Les matrices  $B_1$  et  $B_2$  sont de rang maximal  $p_1$  et  $p_2$  respectivement, où  $p_1$  et  $p_2$  sont les nombres de valeurs propres strictement positives de  $A_1$  et  $A_2$  respectivement comptées avec leurs multiplicités.*

En second lieu, afin d'avoir une chance que les deux problèmes aux limites classiques composant le problème (6.1) soient bien posés, on supposera que le problème (6.1) vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chacune des faces du bord. C'est-à-dire que l'hypothèse suivante est satisfaite :

**Hypothèse 6.2.4** *Pour tout  $\underline{\zeta} \in \Xi$  on a*

$$\ker B_1 \cap E_1^s(\underline{\zeta}) = \ker B_2 \cap E_2^s(\underline{\zeta}) = \{0\}.$$

*En particulier la restriction de  $B_1$  (resp.  $B_2$ ) au sous-espace stable  $E_1^s(\underline{\zeta})$  (resp.  $E_2^s(\underline{\zeta})$ ) est inversible d'inverse notée  $\phi_1(\underline{\zeta})$  (resp.  $\phi_2(\underline{\zeta})$ ), uniformément bornée par rapport à  $\underline{\zeta} \in \Xi$ .*

On rappelle ici un résultat de Strang [Str69], qui établit que si le nombre d'équations  $N$  est égal à 2, alors, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est équivalente au caractère strictement dissipatif des conditions de bords (car ces systèmes peuvent s'écrire sous une forme symétrique). C'est pourquoi dans les exemples des paragraphes 6.4, 6.5 et 6.6, on ne vérifiera pas la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme mais seulement le caractère strictement dissipatif des matrices  $B_1$  et  $B_2$ .

Pour assurer le caractère bien posé du problème à coin, plus précisément pour pouvoir appliquer le lemme "fort=faible" de Sarason [Sar62], on aura besoin de l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 6.2.5** *Les valeurs propres réelles de la matrice  $A_1^{-1}A_2$  associées à des blocs de Jordan sont strictement négatives.*

Dans tout ce qui suit, afin de s'assurer que les amplitudes dans les développements BKW sont régulières, on aura besoin de se restreindre à des termes sources sur les faces du bord plats au coin. On a donc choisi de travailler avec des termes sources sur le bord dans l'ensemble suivant :

$$H_p^\infty := \left\{ g \in H^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \setminus \forall k \in \mathbb{N}, \partial_x^k g(t, x)|_{x=0} = 0 \right\}. \quad (6.7)$$

Enfin dans tout le corps du texte, les vecteurs seront notés indifféremment en ligne ou en colonne.

### 6.3 La génération des phases pour $N = 2$ .

Avant de construire les développements d'optique géométrique il est nécessaire de décrire les phases qui sont attendues dans ces développements. Etant donné que le bord du domaine  $\Omega_T$  n'est pas plat, on s'attend à ce que les phases qu'il est possible de générer soient plus nombreuses que dans le cas du problème aux limites classique. En effet, de prime abord on peut penser qu'un rayon peut venir se réfléchir plusieurs fois sur le bord. Et que les phases associées à chaque rebond soient différentes, générant ainsi plus de phases que dans le cas du problème aux limites classique (ceci sera effectivement le cas d'après l'exemple du paragraphe 6.5).

Il est donc important pour postuler la forme de l'ansatz d'être en mesure de décrire toutes les phases que l'on peut obtenir par rebonds successifs sur les faces du bord.

On reprend ici la discussion de Sarason-Smoller [SS75] qui explique ce phénomène et montre un lien très fort entre la génération de phases par rebond et la géométrie de la variété caractéristique de l'opérateur  $L(\partial)$ .

Comme indiqué dans l'introduction on s'intéresse dans ce chapitre à des problèmes à coin homogènes à l'intérieur et sur l'une des faces, le terme source sur l'autre face étant fortement oscillant. On veut donc comprendre quelles sont les possibles phases issues des réflexions successives de ce terme oscillant sur les faces du bord. Dans la suite de ce chapitre, les termes sources oscillants seront alternativement imposés sur la face  $\partial\Omega_1$  ou sur la face  $\partial\Omega_2$ , ceci dans le seul but de simplifier les calculs. On va dans ce paragraphe décrire la génération des phases lorsque le terme source du problème à coin (6.1) est sur la face  $\partial\Omega_1$  ; le raisonnement pour un problème à terme source sur la face  $\partial\Omega_2$  est similaire.

En guise d'entrée en matière, on décrit dans ce paragraphe la génération des phases pour un problème à coin de deux équations ( $N = 2$ ). La description de la génération des phases dans ce cas particulier aura deux avantages par rapport au cas  $N > 2$ , décrit au paragraphe 6.8, qui simplifient fortement l'étude. D'abord, pour  $N = 2$ , un rayon qui vient frapper une face du bord ne peut **se réfléchir qu'en un seul rayon**. Ensuite, si le terme source sur le bord oscille selon une fréquence hyperbolique pour la matrice résolvante alors on ne pourra générer **que des phases réelles**. Se placer sous de telles simplifications nous a donc semblé être bénéfique pour bien comprendre le processus de génération des phases.

#### 6.3.1 Les phases générées par le terme source.

Le problème à coin dont on décrit la génération des phases est le suivant :

$$\begin{cases} L(\partial)u = 0, (x_1, x_2) \in \Omega, \\ B_1 u|_{x_1=0} = g^\varepsilon, \\ B_2 u|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

où les matrices  $B_1, B_2 \in \mathbf{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ . En effet, on suppose ici que les matrices  $A_1$  et  $A_2$  ont chacune une valeur propre positive et une valeur propre négative (sinon, le problème se ramène facilement à un problème aux limites standard). Le terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  dans le problème à coin (6.8) s'écrit sous la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_2) := e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(t, x_2)} g(t, x_2), \quad (6.9)$$

où l'amplitude  $g \in H_p^\infty$ , et est nulle pour les temps négatifs. La phase plane  $\varphi$  est définie par :

$$\varphi(t, x_2) := \underline{\tau}t + \underline{\xi}_2 x_2,$$

où les paramètres  $\tau > 0$  et  $\xi_2 \in \mathbb{R}$  sont fixés.

Comme indiqué au début de ce paragraphe, on choisit de décrire les phases générées par le terme source  $g^\varepsilon$  lorsque la fréquence  $(\tau, \xi_2)$  est hyperbolique pour la matrice résolvante  $\mathcal{A}_1$ , c'est-à-dire que la matrice  $\mathcal{A}_1(i\tau, \xi_2)$  est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.

Puisque  $g$  appartient à  $H_p^\infty$ , le terme source  $g^\varepsilon$  est nul au coin. C'est pourquoi par vitesse finie de propagation, on peut, dans un premier temps, voir le problème à coin (6.8) comme un problème aux limites standard posé dans le demi-espace  $\{x_1 \geq 0\}$ .

Les problèmes aux limites standards pour des termes sources fortement oscillants selon une phase hyperbolique ont déjà été étudiés (voir par exemple [CG10]). On s'attend donc à ce que le terme source  $g^\varepsilon$  sur la face  $\partial\Omega_1$  induise deux rayons oscillants selon les phases :

$$\begin{aligned}\varphi_e^0(t, x) &:= \varphi(t, x_2) + \xi_1^{0,e} x_1, \\ \varphi_s^0(t, x) &:= \varphi(t, x_2) + \xi_1^{0,s} x_1,\end{aligned}$$

où  $\xi_1^{0,e}$  (resp.  $\xi_1^{0,s}$ ) est la racine en  $\xi_1$  de la relation de dispersion  $\det(\mathcal{L}(\tau, \xi_1, \xi_2)) = 0$  dont la vitesse de groupe associée  $v_e^0$  (resp.  $v_s^0$ ) à la phase  $\varphi_e^0$  (resp.  $\varphi_s^0$ ) est entrante (resp. sortante) pour la face  $\partial\Omega_1$  (cf. définition 6.2.2).

Une remarque très importante pour la suite de ce chapitre est que  $\xi_1^e$  et  $\xi_1^s$  sont les points d'intersection de la section de la variété caractéristique  $V$  à  $\tau = \tau$  avec la droite d'équation  $\{(\tau, \xi_1, \xi_2), \xi_1 \in \mathbb{R}\}$ .

On étudie séparément l'influence des phases  $\varphi_e^0$  et  $\varphi_s^0$  sur la génération des phases.

◊ La phase  $\varphi_s^0$ .

La phase  $\varphi_s^0$ , associée à une vitesse de groupe sortante, décrit le "passé" de l'information qui se trouve sur le bord. C'est-à-dire que pour connaître la provenance d'un point sur la face  $\partial\Omega_1$ , il suffit de suivre la bicaractéristique associée à la vitesse de groupe  $v_s^0$  en remontant le temps vers  $-\infty$ .

On est amené à séparer deux cas, précisant ainsi la définition 6.2.2 :

**Définition 6.3.1** *Une vitesse de groupe  $v = (v_1, v_2)$  sortante pour la face  $\partial\Omega_1$  (i.e. pour laquelle  $v_1 < 0$ ) est :*

- *sortante-entrante si  $v_2 > 0$ .*
- *sortante-sortante si  $v_2 < 0$ .*

- Premier sous-cas :  $v_s^0$  sortante-sortante.

On fixe un point sur la face  $\partial\Omega_1$  et on trace la bicaractéristique associée à la vitesse de groupe  $v_s^0$  passant par ce point. Puisque  $v_s^0$  est sortante-sortante pour les deux faces, l'information au point de la face  $\partial\Omega_1$  considéré ne peut provenir que d'une information qui a été transportée de l'intérieur du domaine, ou de façon équivalente, une information qui a suivi la bicaractéristique considérée lorsque l'on a parcouru les temps négatifs. Or, en l'absence de terme source à l'intérieur, une telle information n'existe pas. Par conséquent, l'amplitude associée à la phase  $\varphi_s^0$  est nulle et elle n'influence ni le développement BKW ni la génération des phases.

Dans les futurs développements BKW (sauf au paragraphe 6.4 pour insister sur le fait que l'amplitude associée est nulle), on ne prendra donc pas en compte les phases sortantes-sortantes si le terme source à l'intérieur est nul.

- Deuxième sous-cas :  $v_s^0$  sortante-entrante.

Une nouvelle fois, on fixe un point sur la face  $\partial\Omega_1$  et on trace la bicaractéristique associée à la vitesse



de groupe  $v_s^0$  passant par ce point. Comme pour le cas d'une vitesse de groupe sortante-sortante, en l'absence de terme source à l'intérieur du domaine, l'information au point de la face  $\partial\Omega_1$  considérée ne peut provenir que d'une information qui aurait été ramenée de l'intérieur du domaine.

Cependant, la bicaractéristique associée à la vitesse de groupe  $v_s^0$  frappe la face  $\partial\Omega_2$  lorsque l'on remonte le temps vers  $-\infty$ , donc l'information au point de la face  $\partial\Omega_1$  pourrait provenir d'une information sur la face  $\partial\Omega_2$  qui aurait été transportée vers la face  $\partial\Omega_1$ . Ce n'est néanmoins pas possible, au temps  $t = 0$  puisque la condition de bord sur  $\partial\Omega_2$  est homogène pour les temps négatifs.

Donc, l'amplitude associée à la phase  $\varphi_s^0$  est nulle au temps  $t = 0$ . C'est pourquoi, on ne la prend pas initialement en compte dans le processus de génération des phases.

On insiste ici sur le fait que, dans le cas sortant-entrant, on écarte la phase  $\varphi_s^0$  a priori que pour le temps  $t = 0$ . En effet, il se pourrait ou du moins on ne peut écarter la possibilité que la phase  $\varphi_s^0$  se trouve être générée suite à un rebond sur la face  $\partial\Omega_2$ . On reviendra sur cette remarque à la fin de ce paragraphe, après avoir décrit précisément ce que l'on entend par rebond sur la face  $\partial\Omega_2$ .

◊ La phase  $\varphi_e^0$ .

La phase  $\varphi_e^0$  est associée à une vitesse de groupe entrante. Au contraire de la phase  $\varphi_s^0$ , elle décrit le "futur" du terme source  $g^\varepsilon$ . C'est-à-dire, que lorsque que l'on déroule le temps vers  $+\infty$ , le terme source oscillant  $g^\varepsilon$  est transporté le long de la bicaractéristique associée à la vitesse de groupe  $v_e^0$ . Donc, la phase  $\varphi_e^0$  transporte une information non nulle et il faut la prendre en compte dans le processus de génération des phases.

On doit néanmoins une fois de plus, séparer deux cas. Ceci se fait en affinant la définition 6.2.2 de la façon suivante :

**Définition 6.3.2** Une vitesse de groupe  $v = (v_1, v_2)$  entrante pour la face  $\partial\Omega_1$  (i.e. pour laquelle  $v_1 > 0$ ) est :

- entrante-entrante si  $v_2 > 0$ .
- entrante-sortante si  $v_2 < 0$ .

Les quatres types de phases oscillantes considérées dans cette analyse sont indiqués à la figure 6.1.

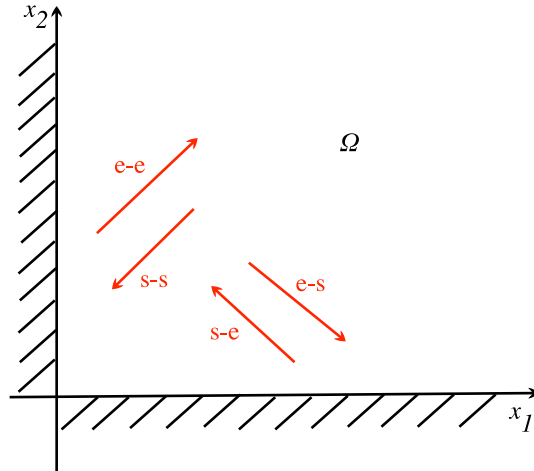


Figure 6.1: Les quatres types de phases oscillantes.

- Premier sous-cas :  $v_e^0$  entrante-entrante.

On choisit un point  $(0, \underline{x}_2)$ , sur la face  $\partial\Omega_1$  tel que  $g^\varepsilon(\cdot, \underline{x}_2)$  soit non nulle et on trace la bicaractéristique associée à la vitesse de groupe  $v_e^0$  passant par ce point. Lorsque l'on déroule le temps

vers  $+\infty$ , l'information transportée le long de cette bicaractéristique ne rencontre jamais la face  $\partial\Omega_2$  et ne pourra pas générer de nouvelles phases par rebond sur cette face.

Donc, lorsque la vitesse de groupe  $v_e^0$  est entrante-entrante, le processus de génération des phases s'arrête et il n'y aura qu'une seule amplitude non nulle dans le développement BKW.

Ce cas est de peu d'intérêt pour notre étude, car il se comporte exactement comme le problème aux limites standard. La singularité apportée par le coin est totalement ignorée.

- Sous-cas  $v_e^0$  entrante-sortante.

On choisit un point  $(0, \underline{x}_2)$ , sur la face  $\partial\Omega_1$  tel que  $g^\varepsilon(\cdot, \underline{x}_2)$  soit non nulle et on trace la bicaractéristique associée à la vitesse de groupe  $v_e^0$  passant par ce point. L'information portée par cette bicaractéristique vient donc frapper, après un certain temps de parcours, la face  $\partial\Omega_2$ . On s'attend donc à ce que le rayon se réfléchisse et que ce rebond génère une nouvelle phase. C'est ce procédé ce que l'on va décrire dans le prochain sous-paragraphe.

### 6.3.2 Le premier rebond.

On se place à un temps suffisamment grand pour que le rayon de vitesse de groupe entrante-sortante  $v_e^0$  commence à frapper la face  $\partial\Omega_2$ . Par vitesse finie de propagation, la réflexion de ce rayon ne peut pas frapper la face  $\partial\Omega_1$  immédiatement. C'est pourquoi, pendant un temps assez petit, on peut voir cette situation comme un problème aux limites standard posé dans le demi-espace  $\{x_2 \geq 0\}$  dont le terme source sur le bord a été allumé par la phase sortante (pour la face  $\partial\Omega_2$ )  $\varphi_e^0$ . Il faut alors déterminer la phase entrante de ce nouveau problème. Puisque la phase  $\varphi_e^0$  était la phase de vitesse de groupe sortante associée à la fréquence  $(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1^{0,e}, \underline{\xi}_2)$  solution de la relation de dispersion  $\det(\mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1^{0,e}, \underline{\xi}_2)) = 0$ , la phase entrante s'écrit sous la forme

$$\varphi_e^1(t, x) := \underline{\tau}t + \underline{\xi}_1^{0,e}x_1 + \underline{\xi}_2^1x_2,$$

où  $\underline{\xi}_2^1$  est la deuxième racine en  $\xi_2$  de la relation de dispersion  $\det(\mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1^{0,e}, \xi_2)) = 0$ . On insiste ici sur le fait que puisque la matrice  $A_2$  est inversible, la relation de dispersion  $\det(\mathcal{L}(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1^{0,e}, \xi_2)) = 0$  est de degré deux dans la variable  $\xi_2$ . Comme cette équation admet déjà une racine réelle  $\underline{\xi}_2$ , la seconde racine  $\underline{\xi}_2^1$  sera automatiquement réelle. La vitesse de groupe,  $v_e^1 = (v_{e,1}^1, v_{e,2}^1)$  associée à la phase  $\varphi_e^1$  vérifie  $v_{e,2}^1 > 0$ .

Il est intéressant de remarquer que  $\underline{\xi}_2^1$  est l'un des points d'intersection de la section de la variété caractéristique  $V$  à  $\tau = \underline{\tau}$  avec la droite d'équation  $\{(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1^{0,e}, \xi_2), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ . Ainsi, pour déterminer le premier rebond ultérieur, on a été amené à considérer, les points d'intersection de  $V$  à  $\tau = \underline{\tau}$  avec une droite horizontale, puis une droite verticale (voir figure 6.3.2). C'est cela que l'on entendait au début de ce paragraphe par dépendance de la génération des phases par rapport à la géométrie de la variété caractéristique.

Comme dans le cas des phases induites par le terme source, on doit séparer deux cas en fonction du signe de  $v_{e,1}^1$ .

- ◊  $v_{e,1}^1 > 0$  ( $v_e^1$  est alors entrante-entrante).

Dans ce cas, comme lorsque la vitesse de groupe  $v_e^0$  était entrante-entrante, le rayon rebondi ne viendra jamais frapper la face  $\partial\Omega_1$  et ne sera jamais rebondi. La génération des phases s'arrête donc là. Il y aura deux amplitudes non nulles dans le développement BKW (c'est le cas de l'équation des ondes, cf. paragraphe 6.4).

- ◊  $v_{e,1}^1 < 0$  ( $v_e^1$  est alors sortante-entrante).

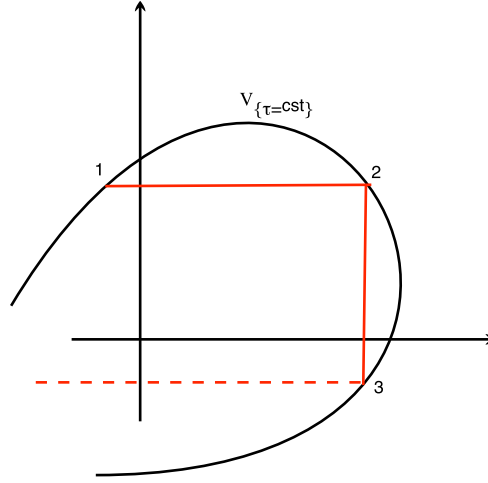


Figure 6.2: Lien entre la géométrie de la variété caractéristique et la génération des phases.

Le rayon rebondi se dirige alors vers la face  $\partial\Omega_1$  et frappe cette dernière après un certain temps de parcours. On doit donc étudier comment il se réfléchit sur cette face ; ceci est fait dans le sous-paragraphe suivant.

### 6.3.3 Les rebonds suivants et résumé.

Le rayon qui vient frapper la face  $\partial\Omega_1$  est sortant pour cette face. C'est pourquoi, comme dans le cas du premier rebond, il est réfléchi en un rayon entrant pour la face  $\partial\Omega_1$ . Pour déterminer la phase associée à ce rayon, il faut déterminer les racines dans la variable  $\xi_1$  de la relation de dispersion  $\det(\mathcal{L}(\underline{\tau}, \xi_1, \xi_2^1)) = 0$ . On connaît déjà une des racines qui est donnée par  $\xi_1 = \xi_1^{0,e}$ , on note  $\xi_1^2$  la seconde racine, la phase entrante pour la face  $\partial\Omega_1$  est donc :

$$\varphi_e^2(t, x) := \underline{\tau}t + \xi_1^2 x_1 + \xi_2^1 x_2.$$

Une fois de plus, le futur du processus de génération des phases dépend de la nature de la vitesse de groupe associée à la phase  $\varphi_e^2$ . En effet, si cette dernière est entrante-entrante, le rayon rebondi ne frappera jamais la face  $\partial\Omega_2$ , il ne sera jamais rebondi et le processus s'arrête. Le développement BKW contiendra alors trois amplitudes non nulles. Mais si la phase  $\varphi_e^2$  est entrante-sortante, alors elle viendra frapper la face  $\partial\Omega_2$  et on sera amené à considérer son rebond sur cette face comme on l'a fait au sous-paragraphe précédent.

En résumé, le processus de génération des phases est le suivant. On démarre d'un terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  et l'on étudie seulement les réflexions possibles de la phase entrante pour cette face. L'analyse de [CG10] montre en effet qu'il existe une unique phase entrante et une unique phase sortante lors de chaque phénomène de réflexion considéré. Si la phase est entrante-entrante, le procédé s'arrête, sinon on détermine la phase rebondie sur  $\partial\Omega_2$  et on l'ajoute dans l'ansatz. Si cette nouvelle phase est sortante-entrante on déterminera son rebond sur la face  $\partial\Omega_1$ , sinon on s'arrête. On est amené à considérer une suite de phases qui sont alternativement associées à des vitesses de groupes entrantes-sortantes et sortantes-entrantes, et ceci jusqu'à ce que lors d'un rebond, la phase obtenue par rebond soit entrante-entrante, ce qui marque la fin du processus de génération des phases.

Il y a bien sûr deux possibilités, ou bien on rencontre effectivement une phase entrante-entrante, alors le nombre de phases générées sera fini (cf. paragraphes 6.4 et 6.5), ou bien on ne rencontre

jamais de phase entrante-entrante (cf. paragraphe 6.6 et 6.7), alors le processus de génération de phases ne s'arrête jamais et le nombre de phases non nulles attendues dans le développement BKW est infini.

On peut remarquer que le procédé de génération des phases dans le cas  $N = 2$  induit une relation d'ordre total naturelle sur les phases. En effet, le plus petit élément est la phase générée par le terme oscillant sur la face  $\partial\Omega_1$ , le suivant, la phase obtenue lors du premier rebond et plus généralement, le  $n^{\text{ième}}$  élément est la phase obtenue lors du  $(n - 1)^{\text{ième}}$  rebond. Cette relation d'ordre coïncidera avec l'ordre dans lequel on déterminera les amplitudes dans le développement BKW.

Dans tout ce sous-paragraphe, on s'est placé sous l'hypothèse tacite selon laquelle lorsque l'on explore les rebonds successifs on ne rencontre jamais de phase de glancing. Cette hypothèse sera vérifiée dans les exemples des paragraphes 6.4-6.5-6.6 et 6.7 et sera explicitement formulée dans le cas général du paragraphe 6.9.

On conclut ce paragraphe en revenant sur le cas où l'amplitude  $\varphi_s^0$  est associée à une vitesse de groupe sortante-entrante. On avait alors écarté cette amplitude du développement BKW sans toutefois exclure le fait qu'elle doive devoir être considérée après un certain nombre de rebonds. En fait, dans le cas  $N = 2$ , on peut totalement l'exclure. En effet, si on note

$$\varphi_n(t, x) := \tau t + \xi_1^n x_1 + \xi_2^n x_2,$$

la  $n^{\text{ième}}$  phase obtenue lorsque l'on applique le processus de génération précédent, alors le lemme 8.1 de [SS75] affirme que les suites  $(\xi_1^n)_n$  et  $(\xi_2^n)_n$  sont monotones. Cette monotonie exclut donc la possibilité de générer la phase  $\varphi_s^0$  lors d'un rebond.

Ce résultat ne sera plus vrai lorsque  $N > 2$  et sera la cause de la possibilité d'avoir des phases autointeragissantes dans le développement BKW.

## 6.4 L'équation des ondes.

On s'intéresse à l'équation des ondes posée dans un quart d'espace. C'est-à-dire que l'on considère le problème à coin :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\partial)u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \partial_1 u^\varepsilon + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_2 u^\varepsilon = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ B_1 u^\varepsilon|_{x_1=0} := \begin{bmatrix} 1 & -a \end{bmatrix} u^\varepsilon|_{x_1=0} = 0, \\ B_2 u^\varepsilon|_{x_2=0} := \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} u^\varepsilon|_{x_2=0} = g^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0. \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Afin d'assurer que ce problème est fortement bien posé, on doit imposer la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur les deux faces du bord de  $\Omega$ . Cependant, comme on l'a déjà mentionné, puisque le système considéré n'a que deux équations, on peut appliquer le théorème de Strang [Str69]. Ce dernier donne l'équivalence entre le caractère fortement dissipatif des conditions de bord et la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (qui dans ce cas se vérifie très facilement puisque tous les calculs sont explicites).

Ainsi il suffit de déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  tels que les conditions de bords soient strictement dissipatives ; un simple calcul donne les conditions :

$$|a| < 1, \quad b < 0. \quad (6.11)$$

D'après le théorème 4.2.1 on sait que le problème à coin (6.10) est fortement bien posé puisque ce dernier est symétrique non caractéristique et vérifie l'hypothèse 6.2.5 (en effet les valeurs propres de

$A_1^{-1}A_2$  sont  $\pm i$ ) ; par conséquent, pour tout  $T > 0$ , le problème (6.10) admet une unique solution  $u^\varepsilon \in \mathcal{C}([-\infty, T]; L^2(\Omega))$  lorsque le terme de bord  $g^\varepsilon$  est au moins dans  $L^2(\partial\Omega_{2,T})$ .

Le but de ce qui suit est de construire une solution approchée du problème à coin (6.10) lorsque l'on choisit un terme de bord  $g^\varepsilon$  fortement oscillant.

### 6.4.1 Description des phases.

On étudie ici plus précisément les réflexions possibles sur les deux faces pouvant provenir du terme source fortement oscillant imposé sur la face  $\partial\Omega_2$ , ceci dans le but de pouvoir déterminer les phases engendrées (dans cet exemple le nombre de phases sera fini) et donc de pouvoir postuler un ansatz pour le développement BKW.

On choisit de travailler avec un terme source sur la face  $\partial\Omega_2$  de la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_1) := e^{\frac{i}{\varepsilon}(\tau t + x_1 \xi_1)} g(t, x_1),$$

avec  $g$  dans  $H_p^{+\infty}(\partial\Omega_2)$ , nulle pour les temps négatifs, où la fréquence  $(i\tau, \xi_1)$  est hyperbolique pour la matrice résolvante :

$$\mathcal{A}_2(\sigma, \eta) := -A_2^{-1}(\sigma + i\eta A_1).$$

La zone hyperbolique de la matrice  $\mathcal{A}_2$  est  $\{(\tau, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{|\tau| > |\xi_1|\}\}$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $\tau$  est strictement positif. Et par symétrie on peut supposer que  $\xi_1$  est strictement positif.

Les valeurs propres imaginaires pures de  $\mathcal{A}_2(i\tau, \xi_1)$ , qui sont de la forme  $\pm i\xi_2$ , sont les racines de :

$$\det(\tau + \xi_1 A_1 \pm \xi_2 A_2) = 0,$$

ce qui équivaut à dire que le triplet  $(\tau, \xi_1, \pm \xi_2)$  est un élément de la variété caractéristique de  $L(\partial)$ . Or un simple calcul montre que la variété caractéristique de l'équation des ondes est, à  $\tau$  fixé, un cercle de rayon  $\tau$  dans les fréquences spatiales. On en déduit donc que :

$$\xi_2 = \sqrt{\tau^2 - \xi_1^2}.$$

On peut de plus calculer explicitement :

$$\ker \mathcal{L}(\tau, \xi_1, +\xi_2) = \text{vect} \{(-\mu, 1)\} \text{ et } \ker \mathcal{L}(\tau, \xi_1, -\xi_2) = \text{vect} \{(\mu, 1)\}, \quad (6.12)$$

où l'on a posé :

$$\mu := \sqrt{\frac{\tau - \xi_1}{\tau + \xi_1}}. \quad (6.13)$$

Les deux noyaux associés aux phases obtenues par réflexion sont donnés par :

$$\ker \mathcal{L}(\tau, -\xi_1, +\xi_2) = \text{vect} \left\{ \left( \frac{1}{\mu}, 1 \right) \right\} \text{ et } \ker \mathcal{L}(\tau, -\xi_1, -\xi_2) = \text{vect} \left\{ \left( -\frac{1}{\mu}, 1 \right) \right\}. \quad (6.14)$$

On pose donc dans la suite :

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, x) &:= \tau t + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \\ \varphi_2(t, x) &:= \tau t + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2, \\ \varphi_3(t, x) &:= \tau t - \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2, \\ \varphi_4(t, x) &:= \tau t - \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Pour chaque phase  $\varphi_j$ , on peut calculer la vitesse de groupe  $v_j$  associée :

$$\begin{aligned} v_1 &= -v_3 = -\frac{1}{|(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)|}(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2), \\ v_2 &= -v_4 = -\frac{1}{|(\underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)|}(\underline{\xi}_1, -\underline{\xi}_2), \end{aligned} \quad (6.16)$$

ces expressions montrent que la vitesse de groupe  $v_1$  est sortante-sortante,  $v_2$  est sortante-entrante,  $v_3$  entrante-entrante et enfin que  $v_4$  est une vitesse de groupe entrante-sortante. On conclut ce sous-paragraphe par le schéma suivant qui reprend la génération des phases.

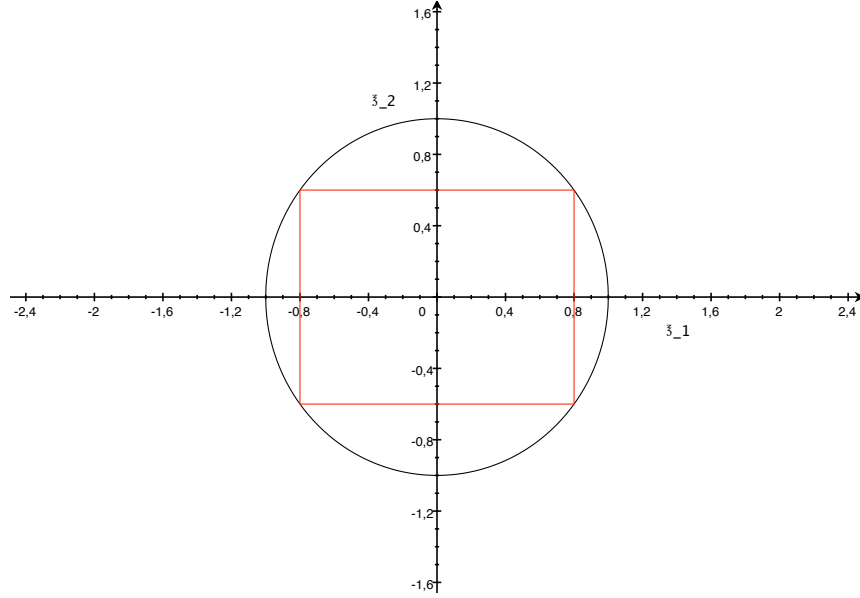


Figure 6.3: Section de la variété caractéristique pour l'équation des ondes.

### 6.4.2 Construction du développement BKW.

Afin de prendre en compte les possibles réflexions décrites dans la partie précédente, on choisit de travailler avec un ansatz de la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{j=1}^4 e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi_j(t, x)} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n,j}(t, x), \quad (6.17)$$

où l'on rappelle que les phases  $\varphi_j$  sont définies en (6.15).

Injectant cet ansatz dans l'équation d'évolution du problème à coin (6.10), identifiant les puissances de  $\varepsilon$  une à une, puis par indépendance linéaire des phases. On obtient la cascade d'équations suivante :

$$\forall j = 1, \dots, 4, \begin{cases} \mathcal{L}(d\varphi_j)u_{0,j} = 0, \\ i\mathcal{L}(d\varphi_j)u_{n+1,j} + L(\partial)u_{n,j} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (6.18)$$

où l'on a utilisé la relation :

$$L(\partial) \left( e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_n \right) \sim e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi} \left( i \sum_{n \geq -1} \varepsilon^n \mathcal{L}(d\varphi)u_{n+1} + \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n L(\partial)u_n \right).$$

Ensuite, injectant l'ansatz (6.17) dans les conditions au bord, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_1 \left[ e^{\frac{i}{\varepsilon} x_2 \xi_2} (u_{n,1} + u_{n,4}) + e^{-\frac{i}{\varepsilon} x_2 \xi_2} (u_{n,2} + u_{n,3}) \right]_{|x_1=0} = 0, \\ B_2 \left[ e^{\frac{i}{\varepsilon} x_1 \xi_1} (u_{n,1} + u_{n,2}) + e^{-\frac{i}{\varepsilon} x_1 \xi_1} (u_{n,3} + u_{n,4}) \right]_{|x_2=0} = e^{\frac{i}{\varepsilon} x_1 \xi_1} \delta_{n,0} g, \end{cases} \quad (6.19)$$

où  $\delta_{n,p}$  désigne le symbole de Kronecker. Comme pour l'équation d'évolution, en identifiant les amplitudes en fonction de la phase à laquelle elles sont associées, on peut décomposer les conditions de bords (6.19) sous la forme du système suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_1 [u_{n,1} + u_{n,4}]_{|x_1=0} = 0, \\ B_1 [u_{n,2} + u_{n,3}]_{|x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{n,1} + u_{n,2}]_{|x_2=0} = \delta_{n,0} g, \\ B_2 [u_{n,3} + u_{n,4}]_{|x_2=0} = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Enfin, injecter l'ansatz dans la condition initiale du problème à coin (6.10) revient à imposer :

$$\forall j = 1, \dots, 4, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n,j}|_{t \leq 0} = 0. \quad (6.21)$$

### Construction du terme principal.

Pour déterminer le terme principal il nous faut déterminer les quatre amplitudes d'ordre 0 en  $\varepsilon$ , et plus particulièrement il nous faut trouver l'ordre dans lequel effectuer cette résolution.

- Le terme  $u_{0,1}$ .

Regroupant les équations (6.18)-(6.20)-(6.21), le terme  $u_{0,1}$  doit satisfaire le système d'équations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(d\varphi_1)u_{0,1} = 0, \\ i\mathcal{L}(d\varphi_1)u_{1,1} + L(\partial)u_{0,1} = 0, \\ B_1 [u_{0,1} + u_{0,4}]_{|x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{0,1} + u_{0,2}]_{|x_2=0} = g, \\ u_{0,1}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Afin de résoudre l'équation (6.22), pour  $j = 1, \dots, 4$ , on a besoin de définir les projecteurs  $P_j$  sur  $\ker(\mathcal{L}(d\varphi_j))$  parallèlement à  $\text{Im}(\mathcal{L}(d\varphi_2))$ . On introduit aussi  $R_j$  le pseudo-inverse de  $\mathcal{L}(d\varphi_j)$  défini par les relations :

$$R_j \mathcal{L}(d\varphi_j) = I - P_j, \quad R_j P_j = P_j R_j = 0.$$

La première équation de (6.22), impose donc que l'amplitude  $u_{0,1}$  est polarisée sur le noyau de  $\mathcal{L}(d\varphi_1)$  c'est-à-dire :

$$u_{0,1} = P_1 u_{0,1}.$$

Injectant cette condition de polarisation dans la deuxième équation de (6.22) et composant par  $P_1$ , on obtient :

$$P_1 L(\partial) P_1 u_{0,1} = 0.$$

Or, d'après le lemme de Lax [Lax57], on a la relation suivante :

$$P_1 L(\partial) P_1 u_{0,1} = (\partial_t + v_1 \cdot \nabla_x) P_1 u_{0,1}. \quad (6.23)$$

Ainsi on a réécrit le système (6.22) sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_1 \cdot \nabla_x) P_1 u_{0,1} = 0, \\ B_1 [u_{0,1} + u_{0,4}]_{|x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{0,1} + u_{0,2}]_{|x_2=0} = g, \\ u_{0,1}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Le point crucial pour résoudre ce système est de remarquer que la vitesse de groupe  $v_1$  est sortante pour les deux faces du quart d'espace. Ainsi, l'équation de transport (6.23) ne voit pas les conditions de bord et le système précédent se réécrit sous la forme (cf. [CG10]) :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_1 \cdot \nabla_x) P_1 u_{0,1} = 0, \\ u_{0,1}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

En intégrant ce système le long des courbes caractéristiques, on peut déterminer  $P_1 u_{0,1}$  et donc  $u_{0,1}$  en tant que solution d'une équation de transport sortante. La solution de cette équation étant aussi régulière que les termes sources, les traces de cette solution sont aussi déterminées. Enfin, l'équation de transport étant homogène on en déduit que  $u_{0,1}$  ainsi que ses traces sont nulles.

**Remarque** Si l'on ajoutait un terme source à l'intérieur de l'équation d'évolution du problème (6.10) de la forme :

$$f^\varepsilon(t, x) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_1} f_1(t, x),$$

avec  $f_1$  dans  $H^\infty(\Omega_T)$ , alors l'équation de transport (6.24), modifiée par un terme source convenable, permettrait toujours de déterminer  $u_{0,1}$  ainsi que ses traces, mais a priori ces objets seraient non nuls.

• Le terme  $u_{0,2}$ . Réitérant le même raisonnement que pour le terme  $u_{0,1}$ , la condition de polarisation sur le noyau de  $\mathcal{L}(d\varphi_2)$  et le lemme de Lax permettent de réécrire les équations (6.18)-(6.20)-(6.21) satisfaites par le terme  $u_{0,2}$  sous la forme (où l'on a utilisé le fait que  $u_{0,1} \equiv 0$ ) :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_2 \cdot \nabla_x) P_2 u_{0,2} = 0, \\ B_1 [u_{0,2} + u_{0,3}]_{|x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{0,2}]_{|x_2=0} = g, \\ u_{0,2}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

Pour résoudre cette équation, il suffit de remarquer que la vitesse de groupe  $v_2$  est entrante pour la face  $\partial\Omega_2$  et sortante pour la face  $\partial\Omega_1$ . Donc l'équation de transport (6.25) a uniquement besoin d'une condition de bord sur la face  $\partial\Omega_2$  et l'on n'a pas besoin de considérer celle sur la face  $\partial\Omega_1$ .

Concernant la condition de bord sur  $\partial\Omega_2$ , utilisant le fait que  $\ker(\mathcal{L}(d\varphi_2)) = E_2^s(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1)$  et la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, cette condition de bord en  $\partial\Omega_2$  peut se reformuler sous la forme :

$$u_{0,2}|_{x_2=0} = \phi_2(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1) g.$$

Cette équation détermine donc de façon unique  $u_{0,2}|_{x_2=0}$ .

**Remarque** Ici, l'emploi de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme peut être remplacé par un calcul explicite ; en effet, d'après (6.12), la restriction de  $B_2$  à  $\ker \mathcal{L}(d\varphi_2)$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix} = -b\mu + 1 > 0,$$



car  $\mu > 0$  et  $b < 0$ , donc

$$u_{0,2}|_{x_2=0} = \frac{g(t, x_1)}{1 - b\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

On a donc ramené le système (6.25) à une équation de transport de la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_2 \cdot \nabla_x) P_2 u_{0,2} = 0, \\ u_{0,2}|_{x_2=0} = \phi_2(\underline{\tau}, \underline{\xi}_1) g, \\ u_{0,2}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.27)$$

qui permet de déterminer  $P_2 u_{0,2}$  et donc  $u_{0,2}$ . Puisque  $u_{0,2}$  admet la même régularité que  $g$ ,  $u_{0,2}$  est dans  $H^{+\infty}(\Omega_T)$  et  $u_{0,2}|_{x_1=0}$  est dans  $H^{+\infty}(\partial\Omega_{1,T})$ , on verra par la suite que  $u_{0,2}|_{x_1=0}$  est en fait même dans  $H_p^\infty$ .

• Le terme  $u_{0,4}$ . Le système vérifié par  $u_{0,4}$  peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_4 \cdot \nabla_x) P_4 u_{0,4} = 0, \\ B_1 u_{0,4}|_{x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{0,3} + u_{0,4}]|_{x_2=0} = 0, \\ u_{0,4}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

Puisque la vitesse de groupe  $v_4$  est sortante pour la face  $\partial\Omega_2$  et entrante pour la face  $\partial\Omega_1$ , on peut en utilisant les mêmes arguments que ceux décrits pour l'amplitude  $u_{0,2}$ , ôter la condition de bord sur  $\partial\Omega_2$ .

D'après (6.14) la restriction de  $B_1$  à  $\ker \mathcal{L}(d\varphi_4)$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} - a > 0,$$

car  $\mu \in ]0, 1[$  et  $|a| < 1$ . Donc  $B_1|_{\ker \mathcal{L}(d\varphi_4)}$  est bien inversible, d'inverse notée  $\phi_1(\underline{\tau}, \underline{\xi}_2)$ .

Par conséquent comme pour la construction de  $u_{0,2}$ , le système (6.28) se réécrit sous la forme de l'équation de transport :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_4 \cdot \nabla_x) P_4 u_{0,4} = 0, \\ u_{0,4}|_{x_1=0} = 0, \\ u_{0,4}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.29)$$

qui permet de montrer que  $u_{0,4} \equiv 0$ .

• Le terme  $u_{0,3}$ . Une fois de plus on réécrit le système vérifié par  $u_{0,3}$  sous la forme d'une équation de transport à vitesse  $v_3$ . Celle-ci étant entrante pour les deux faces, on se doit de conserver les deux conditions de bord :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_3 \cdot \nabla_x) P_3 u_{0,3} = 0, \\ B_1 [u_{0,2} + u_{0,3}]|_{x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{0,3}]|_{x_2=0} = 0, \\ u_{0,3}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.30)$$

D'après la condition de polarisation,  $u_{0,3} \in \ker \mathcal{L}(d\varphi_3)$ , et utilisant le fait que  $B_1|_{\ker \mathcal{L}(d\varphi_3)}$  et  $B_2|_{\ker \mathcal{L}(d\varphi_3)}$  sont inversibles d'inverse respectives  $\phi_1(\underline{\tau}, -\underline{\xi}_2)$  et  $\phi_2(\underline{\tau}, -\underline{\xi}_1)$ , les conditions de bord de (6.30) se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} u_{0,3}|_{x_1=0} &= -\phi_1(\underline{\tau}, -\underline{\xi}_2) B_1 u_{0,2}|_{x_1=0}, \\ u_{0,3}|_{x_2=0} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi les traces de  $u_{0,3}$  sont déterminées de façon unique car  $u_{0,2}|_{x_1=0}$  a été construite précédemment. Donc l'équation (6.30) peut-être résolue de façon unique en tant qu'équation de transport où toutes les conditions sont déterminées :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_3 \cdot \nabla_x) P_3 u_{0,3} = 0, \\ u_{0,3}|_{x_1=0} = -\phi_1(\mathcal{I}, -\xi_2) B_1 u_{0,2}|_{x_1=0}, \\ u_{0,3}|_{x_2=0} = 0, \\ u_{0,3}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

ce qui termine la construction de  $u_{0,3}$  et celle du terme principal du développement BKW.

On récapitule la construction du terme d'ordre zéro en  $\varepsilon$  dans le développement BKW par la proposition suivante :

**Proposition 6.4.1** *Pour tout  $T > 0$ , on a construit quatres fonctions,  $(u_{0,j})_{j=1,\dots,4} \in H^\infty(\Omega_T)$ , qui vérifient les cascades d'équations (6.18)-(6.20)-(6.21) écrites pour  $n = 0$ . Les fonctions  $u_{0,1}$  et  $u_{0,4}$  vérifient :*

$$u_{0,1} \equiv 0 \text{ et } u_{0,4} \equiv 0.$$

De plus,  $u_{0,2}|_{x_1=0}, u_{0,2}|_{x_2=0} \in H_p^\infty$  et pour tout  $\underline{x}_1 \geq 0$ ,  $u_{0,3}|_{x_1=\underline{x}_1} \left( \cdot, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}} \underline{x}_1 \right) \in H_p^\infty$ .

**Démonstration :** ◇ Régularité de  $u_{0,2}$  :

On a déjà justifié qu'en tant que solution d'une équation de transport à vitesse sortante-entrante et à terme source dans  $H_p^\infty$ ,  $u_{0,2} \in H^\infty(\Omega_T)$ , pour tout  $T > 0$ . En effet, il suffit de le vérifier sur la formule :

$$u_{0,2}(t, x) = g \left( t - \frac{1}{v_{2,2}} x_2, x_1 - \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} x_2 \right).$$

Cependant, cette formule permet aussi de vérifier que  $u_{0,2}|_{x_1=0} \in H_p^\infty$ . La formule du binôme donne : pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\partial_{x_2}^n u_{0,2}|_{x_1=0}(t, x_2) = \left[ (-1)^n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \left( \frac{1}{v_{2,2}} \right)^{n-p} \left( \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} \right)^p \partial_t^{n-p} \partial_{x_2}^p g \right] \left( t - \frac{1}{v_{2,2}} x_2, -\frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} x_2 \right).$$

Puisque  $g \in H_p^\infty$  tous les termes dans cette somme sont nuls pour  $n \neq p$  lorsque l'on évalue en  $x_2 = 0$ . Pour  $n = p$ , on a

$$\left( \partial_t^n g \left( t - \frac{1}{v_{2,2}} x_2, -\frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} x_2 \right) \right) \Big|_{x_2=0} = \partial_t^n \left( g \left( t - \frac{1}{v_{2,2}} x_2, -\frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} x_2 \right) \Big|_{x_2=0} \right) = 0,$$

car  $g|_{x_2=0} \equiv 0$ .

◇ Régularité de  $u_{0,3}$  :

Sachant que  $u_{0,2}|_{x_1=0} \in H_p^\infty$ , il est facile de montrer que  $u_{0,3} \in H^{+\infty}(\Omega_T)$ , pour tout  $T > 0$ . En effet,  $u_{0,3}$  s'obtient en résolvant une équation de transport de la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_3 \cdot \nabla_x) u_{0,3} = 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \\ u_{0,3}|_{x_1=0} = C u_{0,2}|_{x_1=0}, \\ u_{0,3}|_{x_2=0} = 0, \\ u_{0,3}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.32)$$

où  $C$  est une matrice constante. Puisque  $u_{0,2}|_{x_1=0} \in H_p^\infty$ , sa prolongation par zéro pour les  $x_2$  négatifs, notée  $\tilde{u}_{0,2}|_{x_1=0}$  est dans  $H^\infty([-\infty, T] \times \mathbb{R}_{x_2})$ . On résout donc l'équation de transport posée dans le demi-espace  $\{x_1 \geq 0\}$  suivante :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_3 \cdot \nabla_x) u = 0, & x_1 > 0, \\ u|_{x_1=0} = C\tilde{u}_{0,2}|_{x_1=0}, \\ u|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Comme  $v_3$  est entrante pour le bord  $\{x_1 = 0\}$ , l'expression explicite de la solution est alors donnée par :

$$u(t, x) = C\tilde{u}_{0,2}|_{x_1=0} \left( t - \frac{1}{v_{3,1}}x_1, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}x_1 \right), \quad (6.33)$$

formule qui montre de plus que  $u \in H^{+\infty}([-\infty, T] \times \mathbb{R}_{x_1}^+ \times \mathbb{R}_{x_2})$  et permet aussi de vérifier facilement que

$$u|_{x_2=0}(t, x_1) = C\tilde{u}_{0,2}|_{x_1=0} \left( t - \frac{1}{v_{3,1}}x_1, -\frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}x_1 \right) = 0,$$

car la vitesse de groupe  $v_3$  étant entrante-entrante, le rapport  $\frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}$  est positif. De plus, si on fixe  $x_1 = \underline{x}_1$  dans (6.33), on calcule facilement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\partial_{x_2}^n u(t, \underline{x}_1, x_2)|_{x_2 = \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}\underline{x}_1} = (-1)^n \left( \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}} \right) C \partial_{x_2}^n \tilde{u}_{0,2}|_{x_1=0} \left( t - \frac{1}{v_{3,1}}\underline{x}_1, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}\underline{x}_1 \right)|_{x_2 = \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}\underline{x}_1} = 0,$$

une fois de plus car le rapport  $\frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}$  est positif.

Donc  $u_R$  la restriction de  $u$  à  $\Omega$  est une fonction  $H^{+\infty}(\Omega_T)$  pour tout  $T > 0$ , qui vérifie d'une part l'équation de transport (6.32) et d'autre part que pour tout  $\underline{x}_1 \geq 0$ ,  $u_{R|_{x_1=\underline{x}_1}} \left( \cdot, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}\underline{x}_1 \right) \in H_p^\infty$ .

□

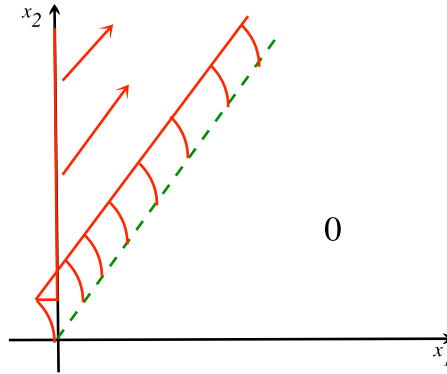


Figure 6.4: Illustration du phénomène de transport pour les vitesses de groupe entrantes-entrantes.

### Termes d'ordre supérieur.

On décrit ici à titre d'exemple la méthode de construction du terme d'ordre un en  $\varepsilon$  dans le développement BKW.

Les idées utilisées sont classiques (voir par exemple [Rau12]) et consistent à utiliser les projecteurs  $P_j$  et les pseudo-inverses  $R_j$  pour adapter la méthode de construction du terme principal

lorsque la condition de polarisation n'est plus satisfaite. Cependant on trouve tout de même important de rappeler, au moins une fois, cette méthode de construction qui sera utilisée par la suite (cf. sous-paragraphe 6.6.3 et 6.9.3).

D'après la cascade d'équations (6.18), les amplitudes d'ordre un en  $\varepsilon$  vérifient les équations suivantes à l'intérieur du domaine :

$$\forall j = 1, \dots, 4, \begin{cases} i\mathcal{L}(d\varphi_j)u_{1,j} + L(\partial)u_{0,j} = 0, \\ i\mathcal{L}(d\varphi_j)u_{2,j} + L(\partial)u_{1,j} = 0, \end{cases} \quad (6.34)$$

ainsi que les conditions de bords (6.20) évaluées en  $n = 1$  :

$$\begin{cases} B_1 [u_{1,1} + u_{1,4}]_{x_1=0} = 0, \\ B_1 [u_{1,2} + u_{1,3}]_{x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{1,1} + u_{1,2}]_{x_2=0} = 0, \\ B_2 [u_{1,3} + u_{1,4}]_{x_2=0} = 0. \end{cases} \quad (6.35)$$

Or, si on compose la première équation de (6.34) par le pseudo-inverse  $R_j$  et la seconde équation par  $P_j$ , par définition, on est amené à résoudre :

$$\forall j = 1, \dots, 4, \begin{cases} (I - P_j)u_{1,j} = iR_j L(\partial)u_{0,j}, \\ P_j L(\partial)u_{1,j} = 0. \end{cases} \quad (6.36)$$

Dans un premier temps, on s'intéresse à la première équation de (6.36). Celle ci détermine la partie non polarisée des amplitudes  $(I - P_j)u_{1,j}$ , de façon explicite en fonction des amplitudes d'ordre zéro  $u_{0,j}$ . Or à ce stade de l'analyse les amplitudes  $u_{0,j}$  sont connues. Donc la première équation de (6.36) détermine de façon unique la partie non polarisée de  $u_{1,j}$ . Pour finir de construire les amplitudes d'ordre un, il suffit de déterminer la partie polarisée.

Pour ce faire, on développe  $u_{1,j}$  en  $u_{1,j} = P_j u_{1,j} + (I - P_j)u_{1,j}$  dans la deuxième équation de (6.36). Ceci permet d'écrire :

$$P_j L(\partial)P_j u_{1,j} = -P_j L(\partial)(I - P_j)u_{1,j}. \quad (6.37)$$

On applique le lemme de Lax [Lax57] au membre de gauche de cette équation. L'équation (6.37) se réécrit sous la forme d'une équation de transport sur la partie polarisée  $P_j u_{1,j}$  :

$$(\partial_t + v_j \cdot \nabla_x)P_j u_{1,j} = -P_j L(\partial)(I - P_j)u_{1,j} = -iP_j L(\partial)R_j L(\partial)u_{0,j}, \quad (6.38)$$

où l'on a utilisé le fait que  $(I - P_j)u_{1,j}$  a été préalablement déterminée par la première équation de (6.36). On s'est donc ramené à résoudre quatre équations de transport qui sont reliées les unes aux autres par les conditions de bord (6.35). L'ordre de résolution est exactement le même que pour les amplitudes d'ordre zéro.

La vitesse de groupe  $v_1$  étant sortante-sortante, l'équation de transport (6.38) n'a pas besoin de conditions de bord sur les faces  $\partial\Omega_1$  et  $\partial\Omega_2$ . De plus, utilisant le fait que l'amplitude d'ordre zéro  $u_{0,1}$  est nulle, elle se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_1 \cdot \nabla_x)P_1 u_{1,1} = 0, \\ u_{1,1}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

dont on déduit que  $u_{1,1}$  est nulle.

La vitesse de groupe  $v_2$  étant sortante-entrante, ainsi pour la résolution de l'équation de transport seule une condition sur la face  $\partial\Omega_2$  est requise. L'équation de transport à résoudre est donc d'après (6.35) et (6.38) :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_2 \cdot \nabla_x) P_2 u_{1,2} = -i P_2 L(\partial) R_2 L(\partial) u_{0,2}, \\ B_2 P_2 u_{1,2}|_{x_2=0} = -i B_2 R_2 (L(\partial) u_{0,2})|_{x_2=0}, \\ u_{1,2}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.39)$$

Les termes sources étant connus, on peut résoudre cette équation de transport. Ceci permet de construire l'amplitude  $u_{1,2}$ .

La construction des amplitudes  $u_{1,4}$  et  $u_{1,3}$  suit exactement la même philosophie ; c'est pourquoi on ne la décrit pas ici. On insiste juste sur le fait que  $u_{1,4}$  sera solution d'une équation de transport homogène, donc elle sera nulle. Tandis que  $u_{1,3}$  sera solution d'une équation de transport homogène sur la face  $\partial\Omega_1$ , mais non homogène à l'intérieur et sur la face  $\partial\Omega_2$  donc  $u_{1,3}$  sera non nulle.

De même, les termes d'ordre supérieur du développement BKW sont construits exactement comme celui d'ordre un. On réutilise cette technique de détermination de la partie non polarisée en fonction des termes d'ordre inférieur, puis de détermination de la partie polarisée en tant que solution d'une équation de transport. Ces équations de transport sont liées les unes aux autres par des conditions de bord. Il est donc important de les résoudre toujours dans le même ordre que celui qui a été décrit pour les amplitudes  $u_{0,j}$ .

On récapitule la construction du développement BKW par la proposition suivante :

**Proposition 6.4.2** *Pour tout  $T > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a construit des fonctions,  $(u_{n,j})_{j=1,\dots,4} \in H^\infty(\Omega_T)$  qui vérifient les cascades d'équations (6.18)-(6.20)-(6.21). Par construction, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :*

$$u_{n,1} \equiv 0 \text{ et } u_{n,4} \equiv 0.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n,2}|_{x_1=0}, u_{n,2}|_{x_2=0} \in H_p^\infty$  et  $u_{n,3}|_{x_1=\underline{x}_1} \left( \cdot, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}} x_1 \right) \in H_p^\infty$  pour tout  $\underline{x}_1 \geq 0$ .

**Démonstration :** On montre le résultat pour  $n = 1$ , la démonstration suit les mêmes idées que celle de la proposition 6.4.1. On commence par montrer que l'amplitude  $u_{1,2} \in H^\infty(\Omega_T)$  et que  $u_{1,2}|_{x_1=0} \in H_p^\infty$ .

D'après la première équation de (6.36) écrite pour  $j = 2$  et la proposition 6.4.1, il est clair que la partie non polarisée de  $u_{1,2}$  est dans  $H^\infty(\Omega_T)$  et que sa trace sur  $\partial\Omega_1$  est dans  $H_p^\infty$ . Donc, l'équation de transport sur la partie polarisée de  $u_{1,2}$ , (6.39), se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_2 \cdot \nabla_x) u = f_2, \\ u|_{x_2=0} = g_2, \\ u|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

où  $f_2 \in H^\infty(\Omega_T)$ , vérifiant de plus  $f_2|_{x_1=0} \in H_p^\infty$ , et  $g_2 \in H_p^\infty$ . La solution de cette équation est un élément de  $H^\infty(\Omega_T)$ , explicitement donné par :

$$u(t, x) = g_2 \left( t - \frac{1}{v_{2,2}} x_2, x_1 - \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} x_2 \right) + \int_0^{x_2} f_2 \left( t - \frac{1}{v_{2,2}} (x_2 - s), x_1 - \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} (x_2 - s), s \right) ds,$$

et on vérifie sur la formule, comme dans la démonstration de la proposition 6.4.1, que la trace sur la face  $\partial\Omega_1$  de la partie polarisée de l'amplitude  $u_{1,2}$  est dans  $H_p^\infty$ .

Comme pour la partie non polarisée de l'amplitude  $u_{1,2}$ , il est clair que la partie non polarisée de l'amplitude  $u_{1,3}$  est dans  $H^\infty(\Omega_T)$ , pour tout  $T > 0$ , et que sa trace sur la face  $\partial\Omega_1$  est dans  $H_p^\infty$ .

La partie polarisée de l'amplitude  $u_{1,3}$  vérifie une équation de transport de la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_3 \cdot \nabla_x)u = f_3, \\ u|_{x_1=0} = g_3, \\ u|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

où  $f_3 \in H^\infty(\Omega_T)$  et est telle que pour tout  $\underline{x}_1 \geq 0$ ,  $f_{3|_{x_1=\underline{x}_1}}(\cdot, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}\underline{x}_1) \in H_p^\infty$ , et où  $g_3 \in H_p^\infty$ . Comme dans la démonstration de la proposition 6.4.1, l'extension de  $g_3$  par zéro pour les  $x_2$  négatifs fournit une fonction de  $H^\infty([-\infty, T] \times \mathbb{R}_{x_1}^+ \times \mathbb{R}_{x_2})$ . L'extension de  $f_3$  par zéro pour les  $x_2$  négatifs fournit une fonction de  $H^\infty(\Omega)$  en raison du fait que  $f_{3|_{x_1=\underline{x}_1}}(\cdot, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}\underline{x}_1) \in H_p^\infty$  pour tout  $\underline{x}_1 \geq 0$ . On peut donc, comme dans la preuve de la proposition 6.4.1, se ramener à résoudre une équation de transport dans le demi-espace  $\{x_1 \geq 0\}$  dont la solution est donnée par :

$$u(t, x) = g_3\left(t - \frac{1}{v_{3,1}}x_1, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}x_1\right) + \int_0^{x_1} f_2\left(t - \frac{1}{v_{3,1}}(x_1 - s), s, x_2 - \frac{v_{3,2}}{v_{3,1}}(x_1 - s)\right) ds.$$

Cette formule permet de conclure exactement comme dans la preuve de la proposition 6.4.1.

□

### 6.4.3 Justification du développement BKW.

Dans ce dernier sous-paragraphe, on montre que le développement BKW converge bien vers la solution exacte du problème à coin (6.10). L'analyse de l'erreur entre la solution exacte du problème à coin pour l'équation des ondes et le développement BKW, et plus généralement pour tous les problèmes qui suivent, est ici faite en norme  $L^2(\Omega_T)$ . Habituellement, cette dernière est plutôt faite dans les espaces  $H_\varepsilon^\infty(\Omega_T)$  (cf. [Rau12]). Le fait que l'on obtienne seulement ici une estimation dans  $L^2(\Omega_T)$  s'explique par le fait que la théorie du caractère bien posé du problème à coin est à ce jour seulement connue pour des données dans  $L^2(\Omega_T)$ , et non pas pour des données dans des espaces de Sobolev d'ordre supérieur. Cependant, si cette régularité d'ordre supérieure est démontrée il n'y a aucune raison de ne pas pouvoir effectuer l'analyse d'erreur dans les espaces basés sur  $H^\infty(\Omega_T)$ , et d'obtenir des théorèmes de convergence uniforme pour le développement BKW.

Le théorème concluant cet exemple est le suivant :

**Théorème 6.4.1** *Soit  $T > 0$ , il existe des fonctions  $(u_{n,j})_{n \in \mathbb{N}, j=1, \dots, 4} \in H^\infty(\Omega_T)$ , qui vérifient les cascades d'équations (6.18)-(6.20)-(6.21), avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :*

$$u_{n,1} \equiv 0 \text{ et } u_{n,4} \equiv 0.$$

*D'autre part, si on pose :*

$$u_{app, N_0}^\varepsilon(t, x) := \sum_{n=0}^{N_0} e^{i \frac{\varphi_2(t, x)}{\varepsilon}} u_{n,2}(t, x) + \sum_{n=0}^{N_0} e^{i \frac{\varphi_3(t, x)}{\varepsilon}} u_{n,3}(t, x),$$

*alors l'erreur entre  $u^\varepsilon$ , la solution exacte du problème à coin (6.10), et  $u_{app, N_0}^\varepsilon$  est  $O(\varepsilon^{N_0+1})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .*

**Démonstration :** Par construction, l'erreur  $u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon$  est solution du problème à coin :

$$\begin{cases} L(\partial)(u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon) = \varepsilon^{N_0+1} \left( e^{i\frac{\varphi_2}{\varepsilon}} L(\partial)u_{N_0+1,2} + e^{i\frac{\varphi_3}{\varepsilon}} L(\partial)u_{N_0+1,3} \right), \\ B_1(u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon)|_{x_1=0} = 0, \\ B_2(u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon)|_{x_2=0} = 0, \\ (u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon)|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

Or, d'après la proposition 6.4.2, le terme source à l'intérieur de ce problème à coin est dans  $L^2(\Omega_T)$ . Utilisant le caractère bien posé du problème (6.40) démontré au théorème 4.2.1, par estimation d'énergie on obtient :

$$\|u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{N_0+1} (\|L(\partial)u_{N_0+1,2}\|_{L^2(\Omega_T)} + \|L(\partial)u_{N_0+1,3}\|_{L^2(\Omega_T)}).$$

De plus, il est clair que  $u_{app,N_0+1}^\varepsilon - u_{app,N_0}^\varepsilon$  est  $O(\varepsilon^{N_0+1})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ , ce qui permet de conclure par l'inégalité triangulaire que

$$\|u_{app,N_0}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{N_0+1}.$$

□

Le schéma suivant décrit l'allure des bicaractéristiques pour l'équation des ondes. Comme on peut le voir, un paquet d'ondes généré par le terme source sur la face  $\partial\Omega_2$  vient frapper la face  $\partial\Omega_1$  et y est réfléchi. Il y a un seul rebond et la situation n'est pas plus riche que pour le problème aux limites standard avec un terme source à l'intérieur.

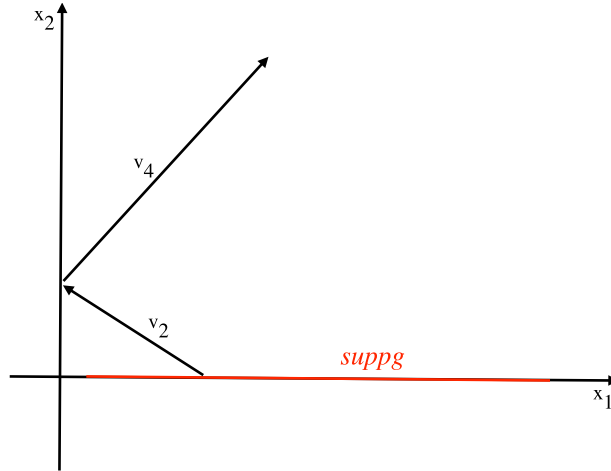


Figure 6.5: Allure des bicaractéristiques pour l'équation des ondes.

## 6.5 Un exemple de développement BKW avec plusieurs rebonds.

Dans ce paragraphe on travaille avec un problème à coin n'ayant pas de signification physique. Comme dans le cas de l'équation des ondes, ce système est à deux équations ; les phases générées seront toutes réelles. Cependant on construit ce système de manière à ce que sa variété caractéristique ne soit plus symétrique par rapport aux axes, ce qui aura pour effet d'augmenter la taille des zones conduisant à des phases entrantes-sortantes et sortantes-entrantes et permettra d'augmenter le nombre de termes non nuls dans le développement BKW.

On considère donc le problème à coin :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\partial)u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \partial_1 u^\varepsilon + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{7} & -3 \\ -3 & \sqrt{7} \end{bmatrix} \partial_2 u^\varepsilon = 0, (t, x_1, x_2) \in \Omega_T, \\ B_1 u^\varepsilon|_{x_1=0} := \begin{bmatrix} 1 & -a \end{bmatrix} u^\varepsilon|_{x_1=0} = g^\varepsilon, \\ B_2 u^\varepsilon|_{x_1=0} := \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} u^\varepsilon|_{x_2=0} = 0, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0. \end{array} \right. \quad (6.41)$$

Comme dans le cas de l'équation des ondes, le théorème de Strang [Str69] permet de se ramener à l'étude des conditions de bord strictement dissipatives, et on restreint donc les paramètres  $a$  et  $b$  comme indiqué ci-dessous :

$$a < 0, b \in \left] -\frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{7} \right[.$$

La variété caractéristique  $V$  de ce système est donnée par l'équation :

$$\tau^2 = 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - 3\xi_1\xi_2, \quad (6.42)$$

qui, à  $\tau > 0$  fixé, est une ellipse dont le grand axe est tourné de  $\frac{\pi}{4}$  par rapport à l'axe des abscisses (voir la figure 6.5). L'équation de cette ellipse peut se réécrire sous la forme :

$$(\tau - \lambda(\xi_1, \xi_2))(\tau + \lambda(\xi_1, \xi_2)) = 0,$$

où l'on a posé  $\lambda(\xi_1, \xi_2) = -\sqrt{2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 3\xi_1\xi_2}$ .

On peut ainsi calculer les vitesses de groupe associées aux fréquences  $(\tau, \xi_1, \xi_2)$  vérifiant  $\tau + \lambda(\xi_1, \xi_2) = 0$  ; ces dernières sont données par :

$$v(\xi_1, \xi_2) := \nabla \lambda(\xi_1, \xi_2) = \frac{-1}{2\sqrt{2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 3\xi_1\xi_2}} \begin{bmatrix} 4\xi_1 - 3\xi_2 \\ 4\xi_2 - 3\xi_1 \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

Le but de ce paragraphe est d'exhiber une fréquence pour laquelle le nombre de termes non nuls dans le développement BKW est strictement supérieur à deux, c'est-à-dire dont l'approximation BKW décrit une propagation le long des rayons avec plus d'un rebond sur le bord  $\partial\Omega$ .

Pour ce faire, on s'intéresse aux réflexions possibles issues du terme source

$$g^\varepsilon := e^{\frac{i}{\varepsilon}(\sqrt{2}t + \frac{3}{2}x_2)} g(t, x_2), \quad (6.44)$$

où  $g \in H_p^\infty$ , nulle pour les temps négatifs.

Le choix de  $\sqrt{2}$  pour la variable  $\tau$  n'est ici qu'une renormalisation simplifiant les calculs. Injectant ces valeurs particulières ( $\tau = \sqrt{2}$  et  $\xi_2 = \frac{3}{2}$ ) dans l'équation de la variété caractéristique (6.42), on est amené à considérer les deux solutions possibles en  $\xi_1$ , notées  $\xi_{1,1}$  et  $\xi_{1,2}$ . Un simple calcul donne (voir figure 6.5):

$$\xi_{1,2} := 1, \quad \xi_{1,1} := \frac{5}{4}.$$

On note les phases associées

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, x) &:= \sqrt{2}t + \xi_{1,1}x_1 + \xi_{2,1}x_2 = \sqrt{2}t + \frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{2}x_2, \\ \varphi_1(t, x) &:= \sqrt{2}t + \xi_{1,2}x_1 + \xi_{2,1}x_2 = \sqrt{2}t + x_1 + \frac{3}{2}x_2, \end{aligned}$$



et on peut aussi d'après (6.43) calculer les vitesses de groupe  $v_j$  associées aux phases  $\varphi_j$  ; ces dernières sont données par :

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{31}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}, \\ v_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

La vitesse de groupe  $v_0$  est sortante-sortante,  $v_1$  est entrante-sortante. Comme indiqué au paragraphe 6.3, on s'intéresse seulement à la propagation de la phase de fréquence  $\varphi_1$ . C'est-à-dire que l'on cherche la nouvelle racine de l'ellipse (6.42) en  $\xi_2$ , notée  $\xi_{2,2}$ , pour  $\tau = \sqrt{2}$  et  $\xi_1 = \xi_{1,2}$ , ou de façon équivalente, on cherche la valeur propre imaginaire pure inconnue de la matrice résolvante  $\mathcal{A}_2(i\sqrt{2}, \xi_{1,2})$ . Une fois de plus, un simple calcul donne

$$\xi_{2,2} := 0.$$

On note

$$\varphi_2(t, x) := \sqrt{2}t + \xi_{1,2}x_1 + \xi_{2,2}x_2 = \sqrt{2}t + x_1,$$

la phase associée et  $v_2$  sa vitesse de groupe qui est donnée par :

$$v_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

$v_2$  étant sortante-entrante, on doit continuer à rechercher ses possibles réflexions. Cependant par symétrie, on peut remarquer que les phases suivantes sont données par les couples  $(\xi_{1,3}, \xi_{2,2})$ ,  $(\xi_{1,3}, \xi_{2,3})$  et enfin  $(\xi_{1,4}, \xi_{2,3})$  avec :

$$\begin{aligned} \xi_{1,3} &:= -\xi_{1,2} = -1, \\ \xi_{2,3} &:= -\xi_{2,1} := -\frac{3}{2}, \\ \xi_{1,4} &:= -\xi_{1,1} = -\frac{5}{4}, \end{aligned}$$

et les vitesses de groupe associées à ces fréquences sont, encore une fois par symétrie données par :

$$\begin{aligned} v_5 &= -v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{31}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}, \\ v_4 &= -v_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{bmatrix}, \\ v_3 &= -v_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Les vitesses de groupe  $v_3$  et  $v_4$  étant respectivement entrante-sortante et sortante-entrante, on a bien eu raison d'étudier leurs possibles réflexions. Enfin, la vitesse de groupe  $v_5$  étant entrante-entrante, on s'arrête bien sur la fréquence  $(\sqrt{2}, \xi_{1,4}, \xi_{2,3})$ .

On note les phases associées aux trois dernières fréquences obtenues par :

$$\begin{aligned} \varphi_3(t, x) &:= \sqrt{2}t + \xi_{1,3}x_1 + \xi_{2,2}x_2 = \sqrt{2}t - x_1, \\ \varphi_4(t, x) &:= \sqrt{2}t + \xi_{1,3}x_1 + \xi_{2,3}x_2 = \sqrt{2}t - x_1 - \frac{3}{2}x_2, \\ \varphi_5(t, x) &:= \sqrt{2}t + \xi_{1,4}x_1 + \xi_{2,3}x_2 = \sqrt{2}t - \frac{5}{4}x_1 - \frac{3}{2}x_2. \end{aligned} \quad (6.48)$$

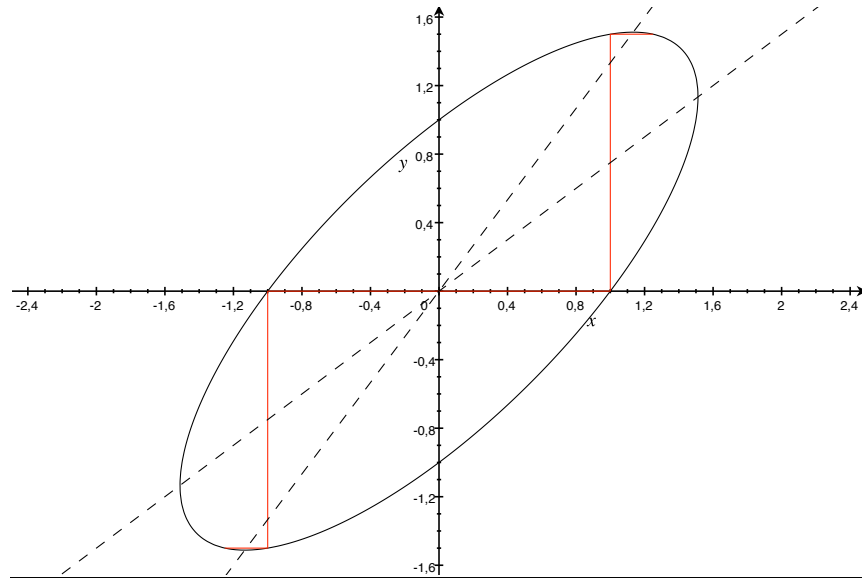


Figure 6.6: Génération des phases pour le problème à coin (6.41).

La figure 6.6 résume la génération des phases.

Le trait rouge désigne les transitions d'une phase à une autre, et les deux lignes en pointillés désignent les changements dans le signe des coordonnées des vitesses de groupe.

On prend un ansatz de la forme :

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{j=1}^5 e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_j(t, x)} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n,j}(t, x). \quad (6.49)$$

Réitérant exactement les mêmes calculs que pour l'équation des ondes, lorsque l'on injecte l'ansatz (6.49) dans l'équation d'évolution de (6.41), on obtient la cascade d'équations :

$$\forall j = 1, \dots, 5, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathcal{L}(d\varphi_j)u_{0,j} = 0, \\ i\mathcal{L}(d\varphi_j)u_{n+1,j} + L(\partial)u_{n,j} = 0. \end{cases} \quad (6.50)$$

Les conditions de bords sont données par les relations :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} B_1 \left[ e^{\frac{3i}{2\varepsilon}x_2} (u_{n,1}) + (u_{n,2} + u_{n,3}) + e^{-\frac{3i}{2\varepsilon}x_2} (u_{n,4} + u_{n,5}) \right]_{|x_1=0} &= \delta_{n,0} e^{\frac{3i}{2\varepsilon}x_2} g, \\ B_2 \left[ e^{\frac{i}{\varepsilon}x_1} (u_{n,1} + u_{n,2}) + e^{-\frac{i}{\varepsilon}x_1} (u_{n,3} + u_{n,4}) + e^{-\frac{5i}{4\varepsilon}x_1} u_{n,5} \right]_{|x_2=0} &= 0, \end{aligned} \quad (6.51)$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante en utilisant l'indépendance linéaire des phases :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_1 [u_{n,1}]_{|x_1=0} = \delta_{n,0} g, \\ B_1 [u_{n,2} + u_{n,3}]_{|x_1=0} = 0, \\ B_1 [u_{n,4} + u_{n,5}]_{|x_1=0} = 0, \\ B_2 [u_{n,1} + u_{n,2}]_{|x_2=0} = 0, \\ B_2 [u_{n,3} + u_{n,4}]_{|x_2=0} = 0, \\ B_2 u_{n,5}|_{x_2=0} = 0. \end{cases} \quad (6.52)$$

Enfin, on doit aussi résoudre les conditions initiales suivantes :

$$\forall j = 1, \dots, 5, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n,j|t \leq 0} = 0. \quad (6.53)$$

La construction du développement BKW dans le cas de ce système, bien que sa variété caractéristique soit "tournée", suit les mêmes idées et utilise les mêmes arguments que ceux décrits pour l'équation des ondes. C'est pourquoi on se permettra de ne pas donner ici tous les détails.

La première équation de (6.50) nous apprend que chaque amplitude  $u_{0,j}$  est polarisée sur  $\ker(\mathcal{L}(d\varphi_j))$ . En appliquant le projecteur adéquat et en utilisant le lemme de Lax, on est ramené à résoudre des équations de transport. Le nombre de conditions de bord nécessaires pour résoudre ces équations dépend de la nature de la vitesse de groupe  $v_j$ .

La vitesse de groupe  $v_1$  est entrante-sortante, il faut uniquement imposer une condition sur la face  $\partial\Omega_1$ . Or, d'après (6.52) et la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, on a :

$$\begin{aligned} B_1 u_{0,1|_{x_1=0}} = g &\iff u_{0,1|_{x_1=0}} = -\phi_1 \left( i\sqrt{2}, \frac{3}{2} \right) g, \\ &\iff u_{0,1|_{x_1=0}} = -\frac{1}{8 + 3\sqrt{7} - a} g \begin{bmatrix} 8 + 3\sqrt{7} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette équation détermine de façon unique  $u_{0,1|_{x_1=0}}$ , puis permet de déterminer  $u_{0,1}$  et sa trace  $u_{0,1|_{x_2=0}}$  en intégrant le long des caractéristiques. On insiste ici sur le fait qu'a priori  $u_{0,1}$  et  $u_{0,1|_{x_2=0}}$  ne sont pas nulles. Il est ensuite facile de voir que le fait que le terme  $u_{0,1}$  soit non nul permet "d'allumer" toutes les autres amplitudes dans le développement BKW.

En effet, par des arguments similaires à ceux précédemment développés, pour déterminer  $u_{0,2}$ , puisque sa vitesse de groupe est sortante-entrante, il suffit de déterminer sa trace sur  $\partial\Omega_2$ . Or, d'après (6.52) et la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, la trace de  $u_{0,2}$  sur  $\partial\Omega_2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} u_{0,2|_{x_2=0}} &= -\phi_2(i\sqrt{2}, 1) B_2 u_{0,1|_{x_2=0}}, \\ &= \frac{1}{b+1} B_2 u_{0,1|_{x_2=0}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La détermination de l'amplitude  $u_{0,3}$  est analogue à celle de  $u_{0,1}$  ; en effet on est de nouveau en présence d'une vitesse de groupe entrante-sortante. Il faut donc résoudre uniquement la condition de bord en  $\partial\Omega_1$ , elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u_{0,3|_{x_1=0}} &= -\phi_1(i\sqrt{2}, 0) B_1 u_{0,2|_{x_1=0}}, \\ &= -\frac{1}{1-a} B_1 u_{0,2|_{x_1=0}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

L'amplitude  $u_{0,4}$  étant associée à une vitesse de groupe sortante-entrante, on se retrouve dans la même situation que pour l'amplitude  $u_{0,2}$ . D'après les conditions de bord (6.52) et la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, la trace  $u_{0,4|_{x_2=0}}$  est donnée par l'équation :

$$u_{0,4|_{x_2=0}} = -\phi_2(i\sqrt{2}, -1) B_2 u_{0,3|_{x_2=0}}.$$

Enfin, l'amplitude  $u_{0,5}$  est associée à une phase entrante-entrante pour les deux faces ; ainsi il faut être en mesure de déterminer ses deux traces pour pouvoir résoudre l'équation de transport à

vitesse  $v_5$ . D'après (6.52) ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} B_1 [u_{0,4} + u_{0,5}]|_{x_1=0} = 0, \\ B_2 u_{0,5}|_{x_2=0} = 0, \end{cases}$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante grâce à la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme :

$$\begin{cases} u_{0,5}|_{x_1=0} = -\phi_1(i\sqrt{2}, -\frac{5}{4}) B_1 u_{0,4}|_{x_1=0}, \\ u_{0,5}|_{x_2=0} = 0. \end{cases}$$

On peut donc montrer la proposition suivante :

**Proposition 6.5.1** *Pour tout  $T > 0$ , on a construit cinq fonctions,  $(u_{0,j})_{j=1,\dots,5} \in H^\infty(\Omega_T)$ , qui vérifient les cascades d'équations (6.50)-(6.52)-(6.53) écrites pour  $n = 0$ .*

Comme pour l'équation des ondes (cf. paragraphe 6.4), l'amplitude  $u_{0,5} \in H^\infty(\Omega_T)$  car dans (6.44), on a choisi  $g \in H_p^\infty$ . Ainsi, les amplitudes  $(u_{0,j})_{j=1,\dots,4}$  ont leurs traces dans  $H_p^\infty$ , en tant que solutions d'équations de transport avec terme source sur le bord dans  $H_p^\infty$ . Ceci permet de conclure que l'amplitude liée à une vitesse de groupe entrante-entrante  $u_{0,5} \in H^\infty(\Omega_T)$ .

En appliquant la même méthode de construction que pour l'équation des ondes, on peut aussi construire les termes d'ordre supérieur du développement BKW. Ceci permet de montrer le théorème suivant dont on omettra la démonstration puisqu'elle est totalement identique (au nombre près de termes dans le développement BKW) à celle pour l'équation des ondes.

**Théorème 6.5.1** *Pour tout  $T > 0$ , il existe des fonctions  $(u_{n,j})_{n \in \mathbb{N}, j=1,\dots,5} \in H^\infty(\Omega_T)$ , qui vérifient les cascades d'équations (6.50)-(6.52)-(6.53).*

Pour  $N_0 \in \mathbb{N}$ , si on pose

$$u_{app,N_0}^\varepsilon(t, x) := \sum_{j=1}^5 \sum_{n=0}^{N_0} e^{i \frac{\varphi_j(t,x)}{\varepsilon}} u_{n,j}(t, x),$$

alors l'erreur entre  $u^\varepsilon$ , la solution exacte du problème à coin (6.41), et  $u_{app,N_0}^\varepsilon$  est  $O(\varepsilon^{N_0+1})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

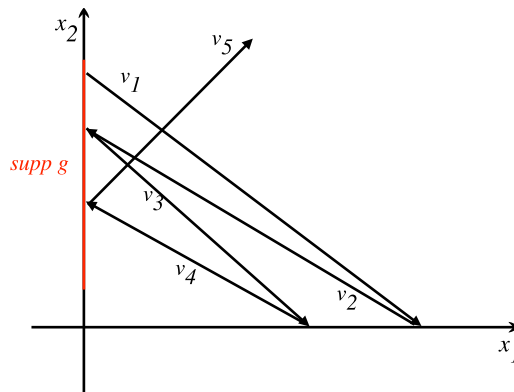


Figure 6.7: Allure des bicaractéristiques du problème à coin (6.41).

Le schéma précédent résume le trajet des bicaractéristiques. En particulier, on remarque qu'il y a quatre rebonds. Ainsi, l'allure des bicaractéristiques pour ce problème est plus riche que celle du problème aux limites standard.

## 6.6 Un exemple de développement BKW avec une infinité de rebonds.

Le but de ce paragraphe est d'exhiber un exemple de problème à coin pour lequel un nombre infini de phases est généré par réflexions successives sur chacune des faces du bord.

On travaille donc avec le problème à coin suivant (ce dernier n'a une fois de plus pas de sens physique) :

$$\begin{cases} L(\partial)u^\varepsilon := \partial_t u^\varepsilon + A_1 \partial_1 u^\varepsilon + A_2 \partial_2 u^\varepsilon = 0, \\ B_1 u^\varepsilon|_{x_1=0} = g^\varepsilon(t, x_2), \\ B_2 u^\varepsilon|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.54)$$

où l'on a posé pour les coefficients de l'opérateur hyperbolique

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

et où les conditions de bords sont données par :

$$B_1 := \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} 1 & \beta \end{bmatrix}.$$

Une fois de plus on est en présence d'un problème à coin symétrique, hyperbolique à multiplicité constante, non caractéristique, et puisque la matrice :

$$A_1^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

admet comme valeur propre réelle  $-1$ , il suffit d'assurer le caractère strictement dissipatif des deux conditions aux limites pour que ce problème soit fortement bien posé.

Pour cela un calcul explicite montre que les conditions de bords sont strictement dissipatives si et seulement si on a :

$$\min(\alpha, \beta) > -\frac{1}{2}. \quad (6.55)$$

Cependant comme on le verra par la suite, d'autres restrictions sur les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  seront à faire (l'une, anecdotique, pour assurer qu'il y ait bien une infinité de rebonds, la seconde, de nature technique, pour assurer la convergence du développement BKW vers la solution exacte).

La variété caractéristique  $V$  du problème à coin (6.54) est donnée par :

$$\det \mathcal{L}(\tau, \xi_1, \xi_2) = 0 \Leftrightarrow \tau^2 - \tau(\xi_1 + \xi_2) - (\xi_2 - \xi_1)^2 = 0, \quad (6.56)$$

ou de façon équivalente,

$$\det \mathcal{L}(\tau, \xi_1, \xi_2) = 0 \Leftrightarrow (\tau - \lambda_+(\xi_1, \xi_2))(\tau - \lambda_-(\xi_1, \xi_2)) = 0,$$

avec

$$\lambda_\pm(\xi_1, \xi_2) := -\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2}.$$

Sous cette forme, on est en mesure de calculer la vitesse de groupe  $v(\xi_1, \xi_2)$  associée à une fréquence  $(\tau, \xi_1, \xi_2)$  vérifiant  $\tau + \lambda_-(\xi_1, \xi_2) = 0$  :

$$v(\xi_1, \xi_2) := \nabla \lambda_-(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2}} (5\xi_1 - 3\xi_2) \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2}} (5\xi_2 - 3\xi_1) \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

### 6.6.1 Description des phases.

On se place à  $\tau = 1$  ;  $V \cap \{\tau = 1\}$  est alors la parabole d'équation :

$$(P) \quad \xi_1 + \xi_2 + (\xi_2 - \xi_1)^2 = 1.$$

On choisit de s'intéresser aux fréquences dans le schéma de propagation par réflexions issues d'un terme source dans (6.54) s'écrivant sous la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_2) := e^{\frac{i}{\varepsilon}(t + \xi_{2,0}x_2)} g(t, x),$$

où  $g$  est un élément de  $H^\infty(\partial\Omega_{1,T})$ , nul pour les temps négatifs<sup>1</sup>.

Un tel terme source génère deux phases intérieures associées aux fréquences  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . La première de ces fréquences est associée à une vitesse de groupe sortante-sortante, c'est pourquoi on ne la prend pas en compte. La deuxième est entrante-sortante, on doit donc étudier ses réflexions.

On applique le principe de génération des phases décrit au paragraphe 6.3 à la fréquence  $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , on est donc amené à considérer un "escalier" dans la parabole  $(P)$  (voir schéma 6.8 ci-dessous). On indexe les points de cet "escalier" par deux suites  $(\xi_{1,p})_{p \in \mathbb{N} \cup \{-1\}}$  et  $(\xi_{2,p})_{p \in \mathbb{N}}$  de manière à ce que les points  $(\xi_{1,p}, \xi_{2,p})_{p \in \mathbb{N}}$  correspondent aux points du "haut" de la parabole et les points  $(\xi_{1,p}, \xi_{2,p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  correspondent aux points du "bas" de la parabole. Enfin on initialise à  $\xi_{1,-1} = \frac{1}{2}$  et  $\xi_{2,0} = \frac{1}{2}$ .

Dans l'optique d'avoir une infinité de phases dans le développement BKW, on doit montrer que les suites  $(\xi_{1,p})_{p \in \mathbb{N} \cup \{-1\}}$  et  $(\xi_{2,p})_{p \in \mathbb{N}}$  sont strictement décroissantes. En fait, on peut montrer par récurrence que :

$$\xi_{1,p} = -2p^2 - 3p - \frac{1}{2}, \quad \xi_{2,p} = -2p^2 - p + \frac{1}{2}.$$

Donc "l'escalier" que l'on construit sur  $V \cap \{\tau = 1\}$  est bien infini. De plus appliquant la formule (6.57) aux points  $(\xi_{1,p}, \xi_{2,p})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\xi_{1,p}, \xi_{2,p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  on calcule les vitesses de groupe associées à chacune de ces phases :

$$v_p := v(\xi_{1,p}, \xi_{2,p}) = \frac{1}{4p^2 + 4p + 2} \begin{bmatrix} 4p + 1 \\ -(4p + 3) \end{bmatrix}, \quad (6.58)$$

$$w_p := v(\xi_{1,p}, \xi_{2,p+1}) = \frac{1}{4p^2 + 8p + 5} \begin{bmatrix} -(4p + 5) \\ 4p + 3 \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

Ce qui permet de vérifier que les points du "haut" sont bien associés à des phases entrantes-sortantes et les points du "bas" à des phases sortantes-entrantes.

On peut calculer les sous-espaces stables pour les fréquences considérées :

$$E_1^s(i, \xi_{1,p}) = \text{vect } e_p, \quad e_p := \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2p+1} \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

$$E_2^s(i, \xi_{2,p}) = \text{vect } f_p, \quad f_p := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2p+2} \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

La figure 6.8 résume la génération des phases.

<sup>1</sup>Ici on n'a pas besoin de prendre  $g \in H_p^\infty$  car on ne rencontrera pas de phase entrante-entrante. De plus, puisque que l'on ne calculera que les deux premiers termes du premier terme du développement BKW, on pourrait prendre  $g \in H^2(\partial\Omega_{1,T})$ .

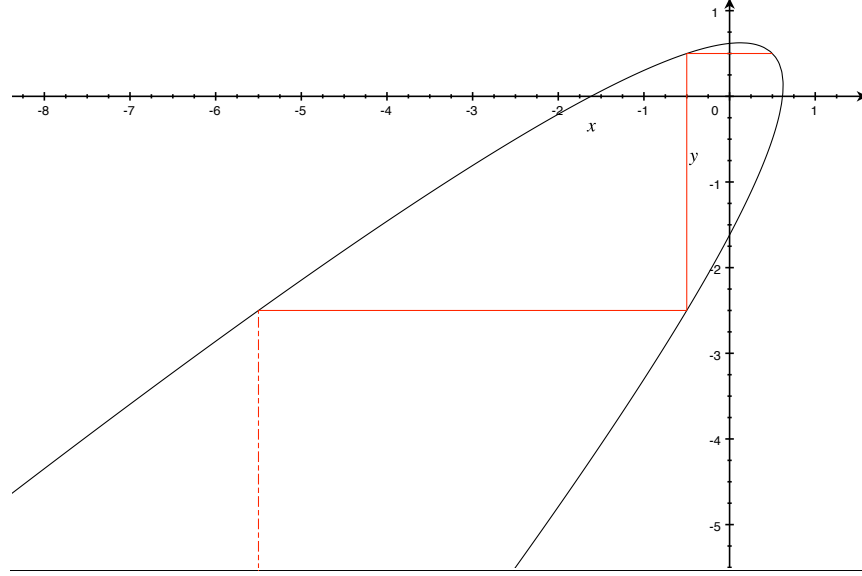


Figure 6.8: Génération des phases pour le problème à coin (6.54).

### 6.6.2 Construction du développement BKW

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note

$$\varphi_p(t, x) := t + \xi_{1,p}x_1 + \xi_{2,p}x_2,$$

les phases associées aux points du "haut", et

$$\psi_p(t, x) := t + \xi_{1,p}x_1 + \xi_{2,p+1}x_2,$$

les phases associées aux points du "bas" de la parabole.

On considère l'ansatz :

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{p=0}^{\infty} e^{\frac{i\varphi_p}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{n,p}^\varphi + \sum_{p=0}^{\infty} e^{\frac{i\psi_p}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{n,p}^\psi. \quad (6.62)$$

Dans ce sous-paragraphe, on va construire un développement BKW purement formel. Le fait que les objets que l'on construit ont un sens revient principalement à montrer que la série (6.62), pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, converge. La démonstration de ce fait sera donnée au sous-paragraphe suivant.

Injectant l'ansatz (6.62) dans l'équation d'évolution du problème à coin (6.54), les phases étant linéairement indépendantes, on obtient pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , les deux cascades d'équations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(d\varphi_p)u_{0,p}^\varphi = 0, \\ i\mathcal{L}(d\varphi_p)u_{n+1,p}^\varphi + L(\partial)u_{n,p}^\varphi = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (6.63)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(d\psi_p)u_{0,p}^\psi = 0, \\ i\mathcal{L}(d\psi_p)u_{n+1,p}^\psi + L(\partial)u_{n,p}^\psi = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6.64)$$

Injectant l'ansatz (6.62) dans les conditions de bords, on obtient par indépendance linéaire des phases :

$$\begin{cases} B_1 \left[ u_{n,0}^\varphi \right]_{|x_1=0} = \delta_{n,0} g, \\ B_1 \left[ u_{n,p}^\varphi + u_{n,p-1}^\psi \right]_{|x_1=0} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}, \\ B_2 \left[ u_{n,p}^\varphi + u_{n,p}^\psi \right]_{|x_2=0} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6.65)$$

### Construction du terme principal.

D'après la première équation de la cascade (6.63) (resp. (6.64)) il s'avère que les amplitudes  $u_{0,p}^\varphi$  (resp.  $u_{0,p}^\psi$ ) sont polarisées sur  $\ker(\mathcal{L}(d\varphi_p))$  (resp.  $\ker(\mathcal{L}(d\psi_p))$ ). On écrit donc

$$u_{0,p}^\varphi(t, x) := \mu_p(t, x) e_p, \quad u_{0,p}^\psi(t, x) := \nu_p(t, x) f_p, \quad (6.66)$$

où  $e_p$  (resp.  $f_p$ ) est le vecteur générateur de  $\ker(\mathcal{L}(d\varphi_p))$  (resp.  $\ker(\mathcal{L}(d\psi_p))$ ) donné en (6.60) (resp. (6.61)).

Appliquant le lemme de Lax [Lax57], on montre que les fonctions scalaires  $\mu_p$  et  $\nu_p$  vérifient les équations de transport :

$$(\partial_t + v_p \cdot \nabla_x) \mu_p = 0, \quad (\partial_t + w_p \cdot \nabla_x) \nu_p = 0. \quad (6.67)$$

Ensuite, d'après (6.58), on sait que la vitesse de groupe  $v_p$  est entrante-sortante donc la première équation de transport de (6.67) nécessite pour sa résolution une condition de bord sur  $\partial\Omega_1$  uniquement. D'après (6.65) et la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, cette condition aux limites s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_0 \cdot \nabla_x) \mu_0 = 0, \\ \mu_{0|_{x_1=0}} = \frac{1}{B_1 e_0} g, \\ \mu_{0|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (6.68)$$

et pour tout  $p \geq 1$ ,

$$\begin{cases} (\partial_t + v_p \cdot \nabla_x) \mu_p = 0, \\ \mu_{p|_{x_1=0}} = -\frac{B_1 f_{p-1}}{B_1 e_p} \nu_{p-1|_{x_1=0}}, \\ \mu_{p|_{t \leq 0}} = 0. \end{cases} \quad (6.69)$$

De même,  $\nu_p$  est déterminée en résolvant :

$$\begin{cases} (\partial_t + w_p \cdot \nabla_x) \nu_p = 0, \\ \nu_{p|_{x_2=0}} = -\frac{B_2 e_p}{B_2 f_p} \mu_{p|_{x_2=0}}, \\ \nu_{p|_{t \leq 0}} = 0. \end{cases} \quad (6.70)$$

La fonction  $\mu_0$  est donnée par

$$\mu_0(t, 0, x_2) = -\frac{1}{1+\alpha} g(t, x_2), \quad \mu_0(t, x_1, x_2) = \mu_0 \left( t - \frac{x_1}{v_{0,1}}, 0, x_2 - \frac{v_{0,2}}{v_{0,1}} x_1 \right),$$

et pour les termes suivants, on trouve :

$$\mu_p(t, 0, x_2) = -\frac{B_1 f_{p-1}}{B_1 e_p} \nu_{p-1}(t, 0, x_2), \quad \mu_p(t, x_1, x_2) = \mu_p \left( t - \frac{x_1}{v_{p,1}}, 0, x_2 - \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} x_1 \right), \quad (6.71)$$

$$\nu_p(t, x_1, 0) = -\frac{B_2 e_p}{B_2 f_p} \mu_p(t, x_1, 0), \quad \nu_p(t, x_1, x_2) = \nu_p \left( t - \frac{x_2}{w_{p,2}}, x_1 - \frac{w_{p,1}}{w_{p,2}} x_2, 0 \right). \quad (6.72)$$



De plus, on peut calculer explicitement :

$$\frac{B_1 f_p}{B_1 e_{p+1}} = -\frac{2p+2}{2p+3} \frac{2p+2-\alpha}{2p+3+\alpha} \text{ et, } \frac{B_2 e_p}{B_2 f_p} = -\frac{2p+2}{2p+1} \frac{2p+1-\beta}{2p+2+\beta}.$$

On remarque au passage que ces deux facteurs sont bien définis d'après le choix (6.55) sur les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  assurant la stricte dissipativité.

On montre par récurrence que  $\mu_p$  et  $\nu_p$  sont données par :

$$\mu_p(t, x) = \tilde{\mu}_p g \left( t - \frac{x_1}{v_{p,1}} - \omega_p^t \left( x_2 - \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} x_1 \right), \omega_p^x \left( x_2 - \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} x_1 \right) \right), \quad (6.73)$$

$$\nu_p(t, x) = \tilde{\nu}_p g \left( t - \frac{x_2}{w_{p,2}} - \frac{1}{v_{p,1}} \left( x_1 - \frac{w_{p,1}}{w_{p,2}} x_2 \right) (1 - v_{p,2} \omega_p^t), -\omega_p^x \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} \left( x_1 - \frac{w_{p,1}}{w_{p,2}} x_2 \right) \right) \quad (6.74)$$

où les  $\tilde{\mu}_p$  et  $\tilde{\nu}_p$  mesurent l'amplitude des fonctions  $u_{0,p}^{\varphi,\psi}$  et les suites  $(\omega_p^t)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\omega_p^x)_{p \in \mathbb{N}}$  sont initialisées à  $\omega_0^x = 1$  et  $\omega_0^t = 0$  (de manière à assurer  $\mu_{0|x_1=0}(t, x_2) = \tilde{\mu}_0 g(t, x_2)$ ). Les termes suivants sont obtenus par résolutions successives d'équations de transport comme expliqué ci-dessous. Par récurrence, et en utilisant (6.71) et (6.72) on obtient pour les coefficients  $\tilde{\mu}_p$  et  $\tilde{\nu}_p$  les formules suivantes :

$$\tilde{\mu}_p = -(2p+1) \prod_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1-\beta}{2k+2+\beta} \frac{\prod_{k=0}^{p-1} 2k+2-\alpha}{\prod_{k=0}^p 2k+1+\alpha}, \quad (6.75)$$

$$\tilde{\nu}_p = (2p+2) \prod_{k=0}^p \frac{2k+1-\beta}{2k+2+\beta} \frac{\prod_{k=0}^{p-1} 2k+2-\alpha}{\prod_{k=0}^p 2k+1+\alpha}. \quad (6.76)$$

En particulier on remarque que si  $\alpha$  est un entier pair ou si  $\beta$  est un entier impair, l'un des sous-espaces stables  $E_1^s(1, \xi_{2,p})$  ou  $E_2^s(1, \xi_{1,p})$  vient coïncider avec  $\ker B_2$  ou  $\ker B_1$ , et tous les termes dans le développement BKW sont nuls à partir d'un certain rang. On se retrouve dans le même cadre que celui du paragraphe 6.5 c'est-à-dire avec un nombre fini d'amplitudes non nulles "allumées" par le terme source oscillant.

Pour déterminer les suites  $(\omega_p^t)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\omega_p^x)_{p \in \mathbb{N}}$ , il suffit de calculer la trace sur  $\partial\Omega_2$  de (6.73) puis d'injecter cette donnée dans l'équation de transport (6.70), ce qui permet de résoudre cette équation et de déterminer la trace de sa solution sur  $\partial\Omega_1$ . On aboutit ainsi à une relation de récurrence sur les suites  $(\omega_p^t)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(\omega_p^x)_{p \in \mathbb{N}}$ . Quelques calculs utilisant (6.58) et (6.59) permettent de montrer que les deux suites vérifiant ces relations sont :

$$\omega_p^x = 4p+1, \quad \omega_p^t = p(2p+3).$$

On a donc déterminé explicitement les expressions des termes d'ordre zéro par rapport à  $p$  :

$$u_{0,p}^{\varphi} = \tilde{\mu}_p g \left( t - (p+2)(2p+1)x_1 - p(2p+3)x_2, (4p+3)x_1 + (4p+1)x_2 \right) e_p, \quad (6.77)$$

$$u_{0,p}^{\psi} = \tilde{\nu}_p g \left( t - (p+2)(2p+1)x_1 - (p+1)(2p+5)x_2, (4p+3)x_1 + (4p+5)x_2 \right) f_p, \quad (6.78)$$

où on rappelle que les  $\tilde{\mu}_p$  et les  $\tilde{\nu}_p$  sont définis en (6.75) et (6.76).

### Construction du terme correcteur.

Maintenant que le terme principal du développement BKW est calculé explicitement, il est facile de déterminer la partie non polarisée du terme d'ordre un. En effet, d'après les cascades d'équations (6.63) et (6.64) on a comme au paragraphe 6.4 :

$$\begin{aligned}(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi &= iR_p^\varphi L(\partial)u_{0,p}^\varphi, \\ (I - P_p^\psi)u_{1,p}^\psi &= iR_p^\psi L(\partial)u_{0,p}^\psi,\end{aligned}$$

avec  $P_p^\varphi$  (resp.  $P_p^\psi$ ) le projecteur sur  $\ker(\mathcal{L}(d\varphi_p))$  (resp.  $\ker(\mathcal{L}(d\psi_p))$ ) parallèlement à  $\text{Im}(\mathcal{L}(d\psi_{p-1}))$  (resp.  $\text{Im}(\mathcal{L}(d\varphi_p))$ ) et  $R_p^\varphi$  (resp.  $R_p^\psi$ ) un pseudo-inverse de  $\mathcal{L}(d\varphi_p)$  (resp.  $\mathcal{L}(d\psi_p)$ ) vérifiant

$$\begin{aligned}R_p^\varphi \mathcal{L}(d\varphi_p) &= I - P_p^\varphi, \quad R_p^\varphi P_p^\varphi = P_p^\varphi R_p^\varphi = 0, \\ R_p^\psi \mathcal{L}(d\psi_p) &= I - P_p^\psi, \quad R_p^\psi P_p^\psi = P_p^\psi R_p^\psi = 0.\end{aligned}$$

De plus, comme on va le voir ces termes peuvent être explicités sous des formes très plaisantes. Dans un souci de simplification des notations, on pose pour  $p \in \mathbb{N}$  fixé :

$$\widetilde{t}_\varphi := t - (p+2)(2p+1)x_1 - p(2p+3)x_2, \quad \widetilde{x}_{2\varphi} := (4p+3)x_1 + (4p+1)x_2, \quad (6.79)$$

$$\widetilde{t}_\psi := t - (p+2)(2p+1)x_1 - (p+1)(2p+5)x_2, \quad \widetilde{x}_{2\psi} := (4p+3)x_1 + (4p+5)x_2, \quad (6.80)$$

et il vient,

$$L(\partial)u_{0,p}^\varphi = \widetilde{\mu}_p L(\partial) \left( g(\widetilde{t}_\varphi, \widetilde{x}_{2\varphi}) \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2p+1} \end{bmatrix} \right) = \widetilde{\mu}_p [\partial_t g - 2\partial_{x_2} g] (\widetilde{t}_\varphi, \widetilde{x}_{2\varphi}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2p+1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.81)$$

Un calcul similaire donne :

$$L(\partial)u_{0,p}^\psi = \widetilde{\nu}_p [\partial_t g - 2\partial_{x_2} g] (\widetilde{t}_\psi, \widetilde{x}_{2\psi}) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2p+2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.82)$$

Pour connaître les parties non polarisées des termes d'ordre un, il suffit donc de calculer les pseudo-inverses  $R_p^\varphi$  et  $R_p^\psi$ . Ceux-ci sont donnés par :

$$R_p^\varphi = \frac{1}{(4p+1)(1+(2p+1)^2)} \begin{bmatrix} 2p & 2p(2p+1) \\ 1 & 2p+1 \end{bmatrix}, \quad (6.83)$$

et

$$R_p^\psi = \frac{1}{(4p+3)(1+(2p+2)^2)} \begin{bmatrix} 2p+1 & -(2p+1)(2p+2) \\ -1 & 2p+2 \end{bmatrix}. \quad (6.84)$$

Enfin combinant d'une part les équations (6.81) et (6.83), et d'autre part les équations (6.82) et (6.84), on obtient les expressions explicites des parties non polarisées d'ordre un :

$$(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi = i \frac{\widetilde{\mu}_p}{(4p+1)(2p+1)} [\partial_t g - 2\partial_{x_2} g] (\widetilde{t}_\varphi, \widetilde{x}_{2\varphi}) \begin{bmatrix} 2p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.85)$$

$$(I - P_p^\psi)u_{1,p}^\psi = i \frac{\widetilde{\nu}_p}{(4p+3)(2p+2)} [\partial_t g - 2\partial_{x_2} g] (\widetilde{t}_\psi, \widetilde{x}_{2\psi}) \begin{bmatrix} -(2p+1) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.86)$$

### 6.6.3 Justification du développement BKW.

Le but de ce sous-paragraphe est de montrer que le développement BKW tronqué construit ci-dessus donne une approximation de la solution exacte du problème à coin (6.54). Soit  $u^\varepsilon$  la solution exacte du problème à coin (6.54) ; on définit la solution approchée :

$$u_{app}^\varepsilon := \sum_{p \geq 0} e^{\frac{i\varphi_p}{\varepsilon}} \left[ u_{0,p}^\varphi + \varepsilon(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi \right] + \sum_{p \geq 0} e^{\frac{i\psi_p}{\varepsilon}} \left[ u_{0,p}^\psi + \varepsilon(I - P_p^\psi)u_{1,p}^\psi \right]. \quad (6.87)$$

On commence par justifier que, sous une restriction sur les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut assurer que les séries définissant  $u_{app}^\varepsilon$  convergent<sup>2</sup>.

**Proposition 6.6.1** *Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont tels que  $\alpha + \beta > 0$ , alors les séries définissant  $u_{app}^\varepsilon$  convergent absolument dans  $\mathcal{C}_t(\mathbb{R}, L_x^2(\Omega))$ .*

*De plus, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont tels que  $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$ , alors les séries définissant  $u_{app}^\varepsilon$  admettent des traces dans  $L^2(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega_1)$  et  $L^2(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega_1)$ .*

**Démonstration :** On commence par montrer que  $\sum_{p \geq 0} e^{\frac{i\varphi_p}{\varepsilon}} u_{0,p}^\varphi$  converge dans  $\mathcal{C}_t(\mathbb{R}, L_x^2(\Omega))$ . Puisque le vecteur  $e_p$  est borné par rapport à  $p$ , il suffit de montrer que :

$$\sum_{p \geq 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mu_p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Or

$$\|\mu_p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \tilde{\mu}_p^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \left| g\left(t - (p+2)(2p+1)x_1 - p(2p+3)x_2, (4p+3)x_1 + (4p+1)x_2\right) \right|^2 dx_1 dx_2.$$

En faisant le changement de variables

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p+2)(2p+1) & p(2p+3) \\ 4p+3 & 4p+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

on obtient

$$\|\mu_p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\tilde{\mu}_p^2}{4p^2 + 4p + 2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} |g(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2,$$

d'où l'on déduit la majoration

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mu_p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{|\tilde{\mu}_p|}{p+1} \|g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}.$$

Or

$$\frac{\tilde{\mu}_{p+1}}{\tilde{\mu}_p} = 1 - \frac{\alpha + \beta}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Donc d'après le critère de d'Alembert, la série  $\sum_{p \geq 0} \frac{|\tilde{\mu}_p|}{p+1}$  converge si  $\alpha + \beta > 0$  (le résultat étant sans restriction sur  $\alpha + \beta$  dans le cas  $\alpha \in 2\mathbb{N}$  ou  $\beta \in 2\mathbb{N} + 1$  car il n'y a alors qu'un nombre fini de termes non nuls dans la série). Par conséquent, la série  $\sum_{p \geq 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mu_p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$  converge si  $\alpha + \beta > 0$ .

Un calcul similaire permet aussi de conclure que  $\sum_{p \geq 0} e^{\frac{i\psi_p}{\varepsilon}} u_{0,p}^\psi$  converge sous la condition  $\alpha + \beta > 0$ .

<sup>2</sup>On peut remarquer que lorsque l'on cherche à construire le développement BKW pour un terme source sur le bord à support compact, sur un intervalle de temps borné, alors la série (6.87) contient un nombre fini de termes et donc a bien un sens.

La situation est légèrement plus favorable pour le terme correcteur  $e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}}(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi$  ; en effet ce terme vérifie :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}}(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \frac{|\tilde{\mu}_p|}{(p+1)^2} \|g\|_{H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}. \quad (6.88)$$

Donc la série de terme général  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$  converge dans  $\mathcal{C}_t(\mathbb{R}, L_x^2(\Omega))$  si  $\alpha + \beta > -1$ , c'est-à-dire pour tous les paramètres conduisant à des conditions aux limites strictement dissipatives, voir (6.55). Le calcul, ainsi que la restriction sur  $\alpha + \beta$ , pour le second terme correcteur  $e^{i\frac{\psi_p}{\varepsilon}}(I - P_p^\psi)u_{1,p}^\psi$  est analogue.

On montre maintenant que, sous la restriction  $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$ , les séries définissant  $u_{app}^\varepsilon$  admettent des traces dans  $L^2(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega_1)$  et dans  $L^2(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega_1)$ . On ne traitera ici que le cas de la trace sur  $\partial\Omega_1$  de la série  $\sum_{p \geq 0} e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} [u_{0,p}^\varphi + \varepsilon(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi]$ , les raisonnements pour les autres configurations étant analogues.

On traite d'abord la série  $\sum_{p \geq 0} e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} u_{0,p}^\varphi$ , un simple calcul donne :

$$\begin{aligned} \|u_{0,p}|_{x_1=0}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \partial\Omega_1)} &\leq |\mu_p| \left( \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \left| g\left(t - p(2p+3)x_2, (4p+1)x_2\right) \right|^2 dt dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{|\mu_p|}{\sqrt{p+1}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}, \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variables

$$\begin{bmatrix} s \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -p(2p+3) \\ 0 & 4p+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Si  $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$ , le critère de d'Alembert et l'inégalité triangulaire permettent de conclure que la trace de  $\sum_{p \geq 0} e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} u_{0,p}^\varphi$  est dans  $L^2(\mathbb{R} \times \partial\Omega_1)$ .

On s'intéresse ensuite à la série  $\sum_{p \geq 0} e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} \varepsilon(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi$ , un calcul similaire à celui qui vient d'être effectué pour la série  $\sum_{p \geq 0} e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} u_{0,p}^\varphi$  montre que l'on a l'estimation suivante :

$$\|e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} \varepsilon(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \partial\Omega_1)} \leq \frac{|\mu_p|}{(p+1)^{\frac{3}{2}}} \|g\|_{H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}.$$

Cette fois encore, la situation est légèrement plus favorable pour le terme correcteur. La série  $\sum_{p \geq 0} e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} \varepsilon(I - P_p^\varphi)u_{1,p}^\varphi$  admet donc une trace  $L^2(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega_1)$  si  $\alpha + \beta > -\frac{1}{2}$ .

□

**Théorème 6.6.1** *Soit  $T > 0$  et  $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$ ; alors le développement BKW converge vers la solution exacte  $u^\varepsilon$  du problème à coin (6.54) au sens où  $u_{app}^\varepsilon - u^\varepsilon$  est  $O(\varepsilon)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .*

**Démonstration :** Par construction, la fonction  $u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon \in L^2(\Omega_T)$  est solution du problème à coin

$$\begin{cases} L(\partial)(u_{app}^\varepsilon - u^\varepsilon) = i\varepsilon \sum_{p \geq 0} e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} L(\partial) R_p^\varphi L(\partial) u_{0,p}^\varphi + e^{i\frac{\psi_p}{\varepsilon}} L(\partial) R_p^\psi L(\partial) u_{0,p}^\psi, \\ B_1(u_{app}^\varepsilon - u^\varepsilon)|_{x_1=0} = i\varepsilon \sum_{p \geq 0} B_1 \left[ e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} R_p^\varphi L(\partial) u_{0,p}^\varphi + e^{i\frac{\psi_p}{\varepsilon}} R_p^\psi L(\partial) u_{0,p}^\psi \right]_{|x_1=0}, \\ B_2(u_{app}^\varepsilon - u^\varepsilon)|_{x_2=0} = i\varepsilon \sum_{p \geq 0} B_2 \left[ e^{i\frac{\varphi_p}{\varepsilon}} R_p^\varphi L(\partial) u_{0,p}^\varphi + e^{i\frac{\psi_p}{\varepsilon}} R_p^\psi L(\partial) u_{0,p}^\psi \right]_{|x_2=0}, \\ (u_{app}^\varepsilon - u^\varepsilon)|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.89)$$

De plus, grâce à la restriction  $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$ , on sait que cette solution  $u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon$  admet des traces  $L^2(\partial\Omega_{1,T})$  et  $L^2(\partial\Omega_{2,T})$ .

Le but de la suite de cette démonstration est de montrer que les termes sources apparaissant dans le problème à coin (6.89) sont bien  $O(\varepsilon)$  dans  $L^2(\Omega_T)$  pour le terme source à l'intérieur et  $L^2(\partial\Omega_{1,T})$  (resp.  $L^2(\partial\Omega_{2,T})$ ) pour le terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ), de manière à pouvoir conclure en utilisant le caractère fortement bien posé du problème à coin (6.89).

◇ Etude du terme source à l'intérieur :

On peut calculer explicitement ce terme ; en effet après un calcul pénible mais sans grande difficulté on peut montrer que

$$L(\partial)R_p^\varphi L(\partial)u_{0,p}^\varphi = \widetilde{\mu}_p O(1) D^2 g(\widetilde{t}_\varphi, \widetilde{x}_{2\varphi}),$$

et

$$L(\partial)R_p^\psi L(\partial)u_{0,p}^\psi = \widetilde{\nu}_p O(1) D^2 g(\widetilde{t}_\psi, \widetilde{x}_{2\psi}),$$

où l'on rappelle que les  $\widetilde{t}_\varphi$ ,  $\widetilde{x}_{2\varphi}$ ,  $\widetilde{t}_\psi$  et  $\widetilde{x}_{2\psi}$  sont définis en (6.79) et (6.80).

Les termes  $L(\partial)R_p^\varphi L(\partial)u_{0,p}^\varphi$  et  $L(\partial)R_p^\psi L(\partial)u_{0,p}^\psi$  sont des sommes de termes qui s'écrivent sous la forme  $O(\widetilde{\mu}_p)\partial^2 g(\widetilde{t}_\varphi, \widetilde{x}_{2\varphi})$  ou bien  $O(\widetilde{\nu}_p)\partial^2 g(\widetilde{t}_\psi, \widetilde{x}_{2\psi})$ . On peut alors réitérer les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 6.6.1 pour obtenir l'estimation  $L^2(\Omega_T)$  pour le terme source à l'intérieur sous la condition  $\alpha + \beta > 0$ .

◇ Termes source sur le bord :

On traite le cas de la face  $\partial\Omega_1$ , le cas de la face  $\partial\Omega_2$  étant entièrement similaire. On rappelle que

$$R_p^\varphi L(\partial)u_{0,p|x_1=0}^\varphi = \frac{\widetilde{\mu}_p}{(4p+1)(2p+1)} [\partial_t g - 2\partial_{x_2} g] \left( t - p(2p+3)x_2, (4p+1)x_2 \right) \begin{bmatrix} 2p \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \|\partial_t g(\widetilde{t}, \widetilde{x}_2)\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}^2 &= \int_{]-\infty, T[ \times \mathbb{R}_+} \left| \partial_t g \left( t - p(2p+3)x_2, (4p+1)x_2 \right) \right|^2 dt dx_2, \\ &\leq \frac{1}{(4p+1)} \|\partial_t g\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}^2, \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variables :

$$\begin{bmatrix} s \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -p(2p+3) \\ 0 & (4p+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi la norme  $\|R_p^\varphi L(\partial)u_{0,p|x_1=0}^\varphi\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}$  se majore par :

$$\|R_p^\varphi L(\partial)u_{0,p|x_1=0}^\varphi\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})} \leq \frac{C|\widetilde{\mu}_p|}{(p+1)^{\frac{3}{2}}} \|g\|_{H^1(\partial\Omega_{1,T})}, \quad (6.90)$$

et il suffit que  $\alpha + \beta > -\frac{1}{2}$  pour que la série  $\sum_{p \geq 0} \|R_p^\varphi L(\partial)u_{0,p|x_1=0}^\varphi\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}$  converge. La contribution du terme  $R_p^\psi L(\partial)u_{0,p|x_1=0}^\psi$  se traite de la même manière.

On peut donc appliquer le caractère fortement bien posé du problème à coin (6.54), et il vient :

$$\|u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\varepsilon.$$

□

L'exemple que l'on a décrit dans ce paragraphe est donc conforme à l'intuition. En effet il semble assez naturel de penser que l'existence d'un rayon piégé (au sens de la définition 6.9.6) n'est pas fatal pour le caractère fortement bien posé du problème à coin dans la mesure où les conditions de bords de ce dernier dissipent suffisamment d'énergie à chaque fois que le rayon est réfléchi.

On conclut ce paragraphe en montrant que le rayon d'optique géométrique précédemment construit se concentre vers le coin. On démarre au temps  $t = 0$  d'un point  $(0, y_0) \in \partial\Omega_1$  et on s'intéresse à son parcours quand il voyage le long des courbes bicaractéristiques. Ce point vient frapper la face  $\partial\Omega_2$  en un point  $(x_0, 0)$  après un certain temps de parcours  $t_0^\varphi$ . Puis, ce rayon est réfléchi et se dirige à nouveau vers la face  $\partial\Omega_1$ . Il atteint cette face en un point  $(0, y_1)$  au bout d'un temps  $t_0^\psi$ . En continuant de suivre ce rayon, on est amené à considérer quatre suites,  $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$  les ordonnées des rebonds sur la face  $\partial\Omega_1$ ,  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  les abscisses des rebonds sur la face  $\partial\Omega_2$  et enfin, les temps de parcours d'une face vers l'autre notés  $(t_p^\varphi)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(t_p^\psi)_{p \in \mathbb{N}}$ .

Une simple récurrence montre que ces suites sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{4p+1} y_0 \quad , \quad x_p = \frac{1}{4p+3} y_0, \\ t_p^\varphi &= \frac{4p^2 + 4p + 2}{(4p+3)(4p+1)} y_0 \quad , \quad t_p^\psi = \frac{4p^2 + 8p + 5}{(4p+3)(4p+5)} y_0. \end{aligned}$$

Puisque les suites  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$  tendent vers 0, on est bien en présence d'un phénomène de concentration vers le coin. D'autre part, on remarque que le temps de transport total vers le coin,  $\sum_{p \geq 0} (t_p^\varphi + t_p^\psi)$  est clairement infini. Donc il est impossible d'atteindre le coin en temps fini.

On remarque que le phénomène de concentration vers le coin est codé par le rapport

$$\beta_p^{-1} := \frac{y_{p+1}}{y_p} = \frac{w_{p,2}}{w_{p,1}} \frac{v_{p,1}}{v_{p,2}} = \frac{4p+1}{4p+5}.$$

Ici on est dans le cas  $\beta_p > 1$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$  mais plus généralement :

- ◇ Si  $\beta_p > 1$ , alors en suivant les bicaractéristiques on se rapproche du coin.
- ◇ Si  $\beta_p < 1$ , alors en suivant les bicaractéristiques on s'éloigne du coin.
- ◇ Si  $\beta_p = 1$ , alors après avoir suivi les bicaractéristiques, on revient exactement à la même position.

Une version légèrement plus générale de cette observation sera d'importance dans le sous-paragraphe 6.9.5.

On conclut ce paragraphe par le schéma récapitulatif suivant qui illustre la propagation du rayon d'optique géométrique.

## 6.7 Retour sur l'exemple (5.13) d'Osher.

Dans ce paragraphe on revient sur l'exemple des deux équations de transport découplées (5.13). On va montrer que le développement BKW pour ce problème admet aussi une infinité de phases. Cependant, on avait mentionné au sous-paragraphe qu'une restriction sur les conditions de bord était nécessaire et suffisante pour que ce problème (5.13) soit fortement bien posé. Cette condition était de la forme  $|ab| < 1$ , et coïncidait avec les paramètres au bord  $a$  et  $b$  qui rendaient l'opérateur  $I - T_1$  (cf. sous-paragraphe 5.3.2) inversible sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . On montre dans ce sous-paragraphe

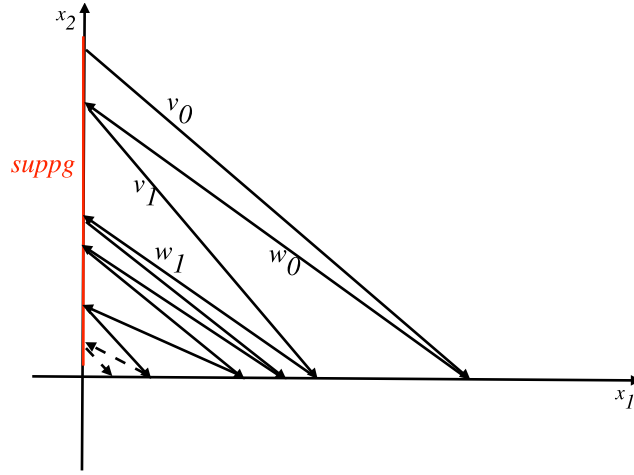


Figure 6.9: Allure des bicaractéristiques du problème à coin (6.54).

que cette condition sur  $a$  et  $b$  est aussi suffisante pour donner un sens à la série définissant le développement BKW.

Le problème à coin que l'on considère dans ce sous-paragraphe s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \partial_1 u^\varepsilon + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \partial_2 u^\varepsilon = 0, \\ \begin{bmatrix} 1 & -a \end{bmatrix} u^\varepsilon|_{x_1=0} = 0, \\ \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} u^\varepsilon|_{x_2=0} = g^\varepsilon, \\ u|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.91)$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$ . On a déjà mentionné que les conditions de bord vérifiaient la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour tout  $a$  et  $b$ . On peut aussi facilement montrer qu'elles sont strictement dissipatives pour

$$|a| < 1, \text{ et } |b| < 1.$$

En effet, en raison de la géométrie "dégénérée" de la variété caractéristique de ce problème, le théorème de Strang [Str69] ne s'applique pas contrairement aux exemples précédents. Un simple calcul montre que l'équation de la variété caractéristique à  $\tau = 1$  est

$$(1 - \xi_1 + \xi_2)(1 + \xi_1 - \xi_2) = 0,$$

et se compose donc de deux droites parallèles.

On pose pour terme source

$$g^\varepsilon(t, x_1) := e^{\frac{i}{\varepsilon}(t+x_1)} g(t, x_1),$$

où  $H^\infty(\partial\Omega_1)$  (en effet, on rencontrera pas de phase entrente-entrante dans le processus de génération des phases donc prendre  $g \in H_p^\infty$ , n'est pas nécessaire.)

On applique le procédé de génération des phases, on obtient que les phases générées par rebonds

successifs et leurs vitesses de groupe associées sont : pour  $p \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_p(t, x) &:= t - (1 + 2p)x_1 - 2px_2, & v_p^\varphi = v^\varphi &:= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ \psi_p(t, x) &:= t + (1 - 2p)x_1 - 2px_2, & v_p^\psi = v^\psi &:= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

les phases sur la droite du "bas" indexées par  $\psi$  sont donc entrantes-sortantes, celles sur la droite du "haut" indexées par  $\varphi$  sont sortantes-entrantes. On donne la figure 6.10 en guise de récapitulatif du processus de génération des phases.

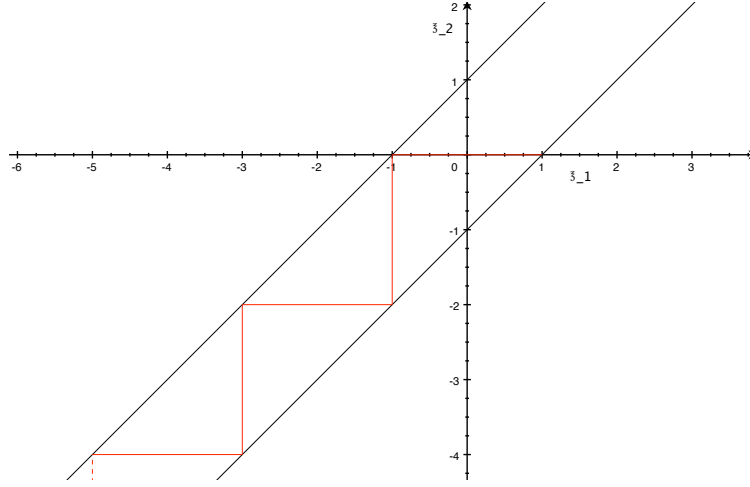


Figure 6.10: La génération des phases pour l'exemple (5.13).

On postule donc un ansatz de la forme :

$$u^\varepsilon \sim \sum_{p \geq 0} e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_p(t, x)} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n, p}^\varphi + \sum_{p \geq 0} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_p(t, x)} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n, p}^\psi. \quad (6.93)$$

Quelques calculs, analogues à ceux effectués dans le paragraphe 6.6, montrent que les amplitudes d'ordre zéro dans l'ansatz (6.93) sont données par :

$$\begin{aligned} u_{0, p}^\varphi &:= a^{p+1} b^p g(t - (2p - 1)x_1 - (2p - 2)x_2, x_1 + x_2), \\ u_{0, p}^\psi &:= (ab)^p g(t - (2p + 1)x_1 - 2px_2, x_1 + x_2). \end{aligned}$$

On voit facilement que si  $|ab| < 1$ , alors la série  $\sum_{p \geq 0} e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_p(t, x)} u_{0, p}^\varphi + e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_p(t, x)} u_{0, p}^\psi \in H^\infty(\Omega_T)$ .

De plus, en réitérant la méthode que l'on a décrite pour l'équation des ondes, on peut construire toutes les amplitudes d'ordre supérieur et on remarque que les séries  $\sum_{p \geq 0} e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_p(t, x)} u_{n, p}^\varphi + e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_p(t, x)} u_{n, p}^\psi \in H^\infty(\Omega_T)$ . En effet, en terme de sommabilité en  $p$  les termes généraux de ces séries seront de la forme  $\sum_{k=1}^n P_k(p)(ab)^{kp}$ , où les  $P_k$  sont des polynômes<sup>3</sup>. L'hypothèse  $|ab| < 1$  assure donc bien la sommabilité.

<sup>3</sup>Les termes en  $(ab)^{kp}$ ,  $k > 1$ , proviennent du transport répété de la trace de la partie non polarisée de l'amplitude.



Sous l'hypothèse  $|ab| < 1$ , le développement BKW tronqué à l'ordre  $N_0$  a bien un sens pour tout  $N_0 \in \mathbb{N}$  et on peut montrer qu'il converge bien vers la solution exacte du problème à coin au sens où l'erreur est  $O(\varepsilon^{N_0+1})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

Cet exemple laisse à penser qu'en présence d'une infinité de phases dans le développement BKW, la condition d'Osher apparait pour assurer la sommabilité du développement BKW. On verra dans le paragraphe 6.9 qu'une version microlocalisée de la condition d'Osher semble apparaître lorsque des phases subissent des phénomènes d'autointeraction.

## 6.8 La génération des phases pour $N > 2$ .

Dans ce sous-paragraphe, on décrit le principe de génération des phases par rebonds successifs sur le bord de  $\Omega$  lorsque le nombre d'équations du problème à coin est strictement supérieur à 2. Comme on va le voir, l'heuristique de la génération des phases pour  $N > 2$  sera assez semblable à celle décrite dans le paragraphe 6.3. Toutefois, de nouvelles difficultés apparaissent naturellement lorsque  $N > 2$  et il est nécessaire de décrire comment les surmonter. Ces difficultés sont les suivantes ; en premier lieu, un rayon qui vient frapper une face du domaine sera a priori réfléchi en plusieurs rayons et on devra donc décrire les réflexions possibles de chaque rebond. En second lieu, il se peut que lorsque l'on étudie l'intersection de la section de la variété caractéristique avec une droite d'équation  $\{(\underline{\tau}, \xi_1, \xi_2)\}$  avec  $\xi_1$  ou  $\xi_2$  fixé, on soit amené à considérer des points d'intersection dont l'une des composantes est complexe. De telles fréquences n'apparaissaient pas dans le cas  $N = 2$  et seront qualifiées d'évanescences. Enfin, la dernière nouveauté par rapport au cas  $N = 2$  est qu'il est maintenant possible de former des "boucles" dans la section de la variété caractéristique, créant ainsi un phénomène d'autointeraction entre les phases.

### 6.8.1 Les phases induites par le terme source.

Comme dans le cas  $N = 2$  on choisit de décrire la génération des phases pour un problème de la forme (6.1) ayant un terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  de la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_2) := e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(t, x_2)}g(t, x_2), \quad (6.94)$$

où l'amplitude  $g \in H_p^\infty$  est nulle pour les temps négatifs, et où  $\varphi$  est une phase plane définie par :

$$\varphi(t, x_2) := \underline{\tau}t + \underline{\xi}_2x_2,$$

avec  $\underline{\tau} > 0$  et  $\underline{\xi}_2 \in \mathbb{R}$ .

Sans perte de généralité, on suppose que pour  $j = 1, \dots, 2$ , les  $p_j$ , les nombres de valeurs propres strictement positives (comptées avec la multiplicité) des matrices  $A_j$  sont non nuls.

Reprenant la même étude que dans le cas  $N = 2$ , on sait que les phases induites par le terme source (6.94) sont de la forme :

$$\varphi_k(t, x) := \underline{\tau}t + \xi_1^k x_1 + \underline{\xi}_2 x_2,$$

où les  $(\xi_1^k)_k$  sont les racines dans la variable  $\xi_1$  de la relation de dispersion  $\det \mathcal{L}(\underline{\tau}, \xi_1, \xi_2) = 0$ . On peut séparer ces phases en deux grande catégories, les phases oscillantes pour lesquelles  $\xi_1^k \in \mathbb{R}$  et les phases complexes pour lesquelles  $\xi_1^k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

D'après la structure des sous-espaces stables et instables qui a été décrite dans le paragraphe 6.2 (voir plus précisément la décomposition (6.2)), on sait que les phases complexes se décomposent en deux catégories. La première correspond aux phases pour lesquelles  $\text{Im } \xi_1 < 0$ , ces dernières

seront qualifiées d'explosives. La seconde correspond aux phases pour lesquelles  $\text{Im } \xi_1 > 0$ , qui seront qualifiées d'évanescences. Les phases oscillantes, elles, se décomposent toujours en quatre catégories, les entrantes-entrantes, les entrantes-sortantes, les sortantes-sortantes et les sortantes-entrantes.

De plus, d'après l'analyse du paragraphe 6.2, on sait que le nombre de phases entrantes pour la face  $\partial\Omega_1$  additionné au nombre de phases évanescences pour la face  $\partial\Omega_1$  est égal à  $p_1$ , tandis que le nombre de phases explosives ou sortantes pour la face  $\partial\Omega_1$  est  $N - p_1$ .

On commence par décrire le comportement associé aux phases oscillantes. Comme dans le cas  $N = 2$ , on doit refaire l'étude de cas selon la nature de la vitesse de groupe.

◇  $\varphi_k$  sortante-sortante.

Dans ce cas, reprenant exactement les mêmes arguments que dans le cas  $N = 2$ , on ne prend pas en compte cette phase dans le développement BKW.

◇  $\varphi_k$  sortante-entrante.

Une fois de plus, en réitérant les mêmes arguments que dans le cas  $N = 2$ , on écarte **dans un premier temps** cette phase du développement BKW. Cependant, comme on va le voir par la suite, en raison de possibles boucles dans la section de la variété caractéristique lorsque  $N > 2$ , il se peut que l'on soit amené à considérer cette phase plus tard dans le processus de génération des phases (voir à ce sujet l'exemple du sous-paragraphe 6.9.1). Ainsi, il se peut que l'on retombe sur la phase  $\varphi_k$  après un certain nombre de rebonds.

Donc comme dans le cas  $N = 2$ , on écarte **initialement** les phases sortantes pour la face  $\partial\Omega_1$ .

◇  $\varphi_k$  entrante-entrante.

Comme dans le cas  $N = 2$ , si on considère un point  $y$  de la face  $\partial\Omega_1$  tel que  $g(y) \neq 0$ , l'information en ce point sera transportée, lorsque l'on déroule le temps vers  $+\infty$ , le long de la droite passant par  $y$  et de direction  $v_k$ , où  $v_k$  est la vitesse de groupe entrante-entrante associée à  $\varphi_k$ . Ainsi, ce rayon ne frappera jamais la face  $\partial\Omega_2$ , donc ne générera aucune phase par rebond. Comme dans le cas  $N = 2$ , les phases entrantes-entrantes constituent des cas de condition d'arrêt. Cependant, puisqu'il se peut qu'il y ait plusieurs phases entrantes-entrantes, il faudra tout de même toutes les considérer dans le développement BKW.

◇  $\varphi_k$  entrante-sortante.

Le cas des phases entrantes-sortantes est une fois de plus le plus intéressant. En effet, lorsque l'on transporte un point  $y$  (vérifiant  $g(y) \neq 0$ ) de la face  $\partial\Omega_1$  le long de la droite portée par une vitesse de groupe entrante-sortante, ce dernier vient frapper la face  $\partial\Omega_2$  au bout d'un certain temps de parcours et donne ainsi lieu à de nouvelles phases par rebond. Il faut donc comme dans le cas  $N = 2$  étudier les nouvelles phases obtenues par réflexion. Cependant, on insiste ici sur le fait que dans le cas  $N > 2$ , il se peut qu'il y ait plus d'une phase associée à une vitesse de groupe entrante-sortante. Il faudra donc étudier les rebonds de chacune de ces phases. C'est pourquoi, dans la suite, on fixe une de ces phases,  $\varphi_{\underline{k}}$ , et on va décrire ses rebonds. On réitérera ensuite la construction pour chacune de ces phases.

◇  $\varphi_k$  complexe.

Reprenant l'étude des phases complexes pour le développement BKW du problème aux limites standard (voir par exemple [Mar10] et [Les07]), on s'attend à ce que les amplitudes associées à des phases complexes transportent l'information dans la direction normale à la face  $\partial\Omega_1$ . Cependant, cette propagation de l'information est exponentiellement décroissante (resp. croissante) par rapport

à la variable  $x_1$  pour les amplitudes liées à des phases évanescentes (resp. explosives). Par la suite, puisque l'on cherche à construire des amplitudes dans  $L^2(\Omega)$ , on écarte les amplitudes liées à des modes explosifs.

Ainsi, on ne conserve que les phases complexes évanescentes ; ces dernières propagent le terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  dans la direction normale à la face  $\partial\Omega_1$  avec un amortissement exponentiel par rapport à la variable  $x_1$ . Puisque pour des questions de régularité des amplitudes dans le développement BKW, on a choisi de travailler avec un terme source  $g \in H_p^\infty$ , ce dernier vérifie, en particulier,  $g(t, 0) = 0$ . Par conséquent, l'information propagée par un mode évanescent ne vient jamais frapper la face  $\partial\Omega_2$  et donc les modes évanescents pour la face  $\partial\Omega_1$  sont des cas d'arrêt du processus de détermination des phases au même titre que les phases ayant une vitesse de groupe entrante-entrante.

En résumé, les phases induites par le terme source  $g^\varepsilon$  seront les phases qui sont entrantes pour la face  $\partial\Omega_1$  et les phases qui sont évanescents pour cette même face. Les phases évanescents pour la face  $\partial\Omega_1$  et les phases entrantes-entrantes ne seront pas réfléchies. On s'intéresse donc comme dans le cas  $N = 2$  aux réflexions possibles des phases ayant une vitesse de groupe entrante-sortante. On insiste cependant sur le fait qu'a priori il se peut qu'il y en ait plusieurs. C'est pourquoi, on doit déterminer les rebonds de chacune de ces phases.

### 6.8.2 Le premier rebond.

Comme dans le cas de la génération des phases pour  $N = 2$ , une fois que l'on a fixé l'une des phases entrantes-sortantes,  $\varphi_k$ , induite par le terme source, pour déterminer ses rebonds on est amené à déterminer les racines dans la variable  $\xi_2$  de la relation de dispersion

$$\det(\mathcal{L}(\tau, \xi_1^k, \xi_2)) = 0.$$

De façon équivalente, si on considère les éventuelles racines de partie imaginaire non nulle comme des points à l'infini, cela revient à considérer les intersections de la droite d'équation  $\{(\tau, \xi_1^k, \xi_2), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$  avec  $V_{\tau=\tau}$ .

Réitérant les arguments du paragraphe 6.2 et ceux du sous-paragraphe précédent, on peut écarter d'office les phases ayant des vitesses de groupe sortante-sortante ou entrante-sortante et les phases explosives (*i.e.* celles pour lesquelles  $\xi_2 \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$  et  $\text{Im } \xi_2 < 0$ ) pour la face  $\partial\Omega_2$ .

On se ramène donc à considérer seulement les phases évanescents pour la face  $\partial\Omega_2$  et les phases oscillantes ayant une vitesse de groupe entrante-entrante ou entrante-sortante. Les phases évanescents propagent l'information dans la direction normale à la face  $\partial\Omega_2$  avec un amortissement exponentiel dans la variable  $x_2$ . Donc les phases évanescents pour la face  $\partial\Omega_2$ , comme les phases entrantes-entrantes sont des conditions d'arrêt dans la génération des phases.

Les phases sortantes-entrantes, viendront se réfléchir sur la face  $\partial\Omega_1$  et il faudra déterminer leurs rebonds pour chacune de ces phases. Dans la suite, on fixe l'une de ces phases,  $\varphi_{k_1}$ , elle vérifie :

$$\varphi_{k_1}(t, x) := \tau t + \xi_1^k x_1 + \xi_2^{k_1} x_2.$$

### 6.8.3 Les rebonds suivants et résumé.

La rayon porté par la phase  $\varphi_{k_1}$  vient frapper la face  $\partial\Omega_1$  et il s'y réfléchit en plusieurs rayons qui sont ou entrants pour la face  $\partial\Omega_1$  ou bien évanescents pour cette même face. Une fois de plus, pour déterminer ces rayons réfléchis il est nécessaire de s'intéresser aux racines en  $\xi_1$  de la relation de dispersion

$$\det(\mathcal{L}(\tau, \xi_1, \xi_2^{k_1})) = 0.$$

Si cette équation n'admet aucune racine  $\xi_1^{k_2} \in \mathbb{R}$  telle que la vitesse de groupe associée à la phase

$$\varphi_{k_2}(t, x) := \tau t + \xi_1^{k_2} x_1 + \xi_2^{k_1} x_2.$$

soit entrante-sortante, alors aucune des phases produites par le rebond ne se rebondira sur la face  $\partial\Omega_2$  et donc le procédé de génération des phases **pour la phase**  $\varphi_{k_1}$  s'arrête. On choisit alors une autre phase obtenue au rebond précédent et on étudie ses rebonds.

Si au contraire, la relation de dispersion admet des racines qui produisent des phases ayant une vitesse de groupe entrante-sortante, on va étudier tous les rebonds de ces phases sur la face  $\partial\Omega_2$  en réitérant la méthode décrite au sous-paragraphe précédent.

On insiste ici sur le fait que lors d'un rebond sur la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ), le fait que l'on écarte les phases sortantes-entrantes (resp. entrantes-sortantes) n'implique en rien que ces phases n'apparaîtront pas tout de même dans le développement BKW.

En effet, soit  $(\tau, \xi_1, \xi_2)$  une phase entrante-sortante générée par le terme source et  $(\tau, \xi_1, \tilde{\xi}_2)$  une phase sortante-entrante induite par le terme source (qui en accord avec le procédé de génération des phases que l'on a décrit est écartée). On suppose que l'intersection de  $V_{\tau=\tau}$  avec la droite d'équation  $\{(\tau, \xi_1, \xi_2), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$  contienne une valeur de  $\xi_2, \tilde{\xi}_2$ , telle que la phase associée soit sortante-entrante et que l'intersection de  $V_{\tau=\tau}$  avec la droite d'équation  $\{(\tau, \xi_1, \tilde{\xi}_2), \xi_1 \in \mathbb{R}\}$  contienne la fréquence  $(\tau, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$  (de façon équivalente, on suppose qu'il existe un rectangle de côtés parallèles aux axes du repère dont les sommets sont des points de  $V_{\tau=\tau}$ ). Alors, si la fréquence  $(\tau, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$  est associée à une fréquence entrante-sortante, on remarque, en appliquant le principe de génération des phases (plus précisément lors du troisième rebond), que l'on est amené à considérer la fréquence  $(\tau, \xi_1, \tilde{\xi}_2)$  que l'on avait initialement exclue.

De plus, lorsque l'on étudie les rebonds de la phase associée à la fréquence  $(\tau, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$  sur la face  $\partial\Omega_1$ , on est amené à reprendre en compte la phase de fréquence  $(\tau, \xi_1, \xi_2)$ . Ainsi, la phase pour la fréquence  $(\tau, \xi_1, \xi_2)$  "s'autogénère" puisqu'on la retrouve dans les phases qu'elle a générées. C'est ce que l'on entendra dans la suite par phénomène d'autointeraction et/ou de "boucle".

On renvoie au sous-paragraphe 6.9.1 pour un exemple de problème à coin dont la variété caractéristique vérifie ce genre de configuration.

Le fait qu'à chaque rebond il y ait possiblement plus d'une phase générée et ce phénomène d'autointeraction entre les phases impliquent que l'on n'a plus un ordre naturel sur les phases comme dans le cas  $N = 2$ . Dans le cas  $N > 2$ , on est plutôt en présence d'un phénomène d'arborescence correspondant à la génération des phases lors de chaque rebond. Ainsi, construire les développements BKW pour  $N > 2$  est moins intuitif que dans le cas  $N = 2$  pour lequel il suffisait de déterminer les amplitudes dans l'ordre induit par la génération des phases. Dans le paragraphe suivant, on va montrer comment surmonter cette absence d'ordre "naturel".

## 6.9 Développements BKW pour $N > 2$ et rayon piégé.

On considère dans tout ce qui suit un système hyperbolique de  $N$  équations :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + A_1 \partial_1 u^\varepsilon + A_2 \partial_2 u^\varepsilon = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ B_1 u^\varepsilon|_{x_1=0} = g^\varepsilon, \\ B_2 u^\varepsilon|_{x_2=0} = 0, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.95)$$

où  $A_1, A_2 \in \mathbf{M}_N(\mathbb{R})$  avec  $N > 2$ ,  $B_1 \in \mathbf{M}_{p_1, N}(\mathbb{R})$  et  $B_2 \in \mathbf{M}_{p_2, N}(\mathbb{R})$ .

Comme on va le voir, afin de construire le développement BKW pour un problème à coin ayant plus de deux équations, imposer la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chacune des faces n'est a priori pas suffisant et l'on sera amené à demander l'inversibilité d'un certain opérateur obtenu dans une relation de compatibilité entre les traces des amplitudes.

Il est intéressant de remarquer que c'est justement une telle relation d'inversibilité qu'Osher imposait dans [Osh73] et [Osh74b] pour établir le caractère bien posé de (6.95).

Cette condition d'inversibilité apparaît naturellement lorsque l'on considère des problèmes à coin qui admettent des rayons dits piégés (voir définition 6.9.6 ci-dessous). Ces rayons sont faciles à générer si l'on considère des opérateurs hyperboliques pour lesquels la section de la variété caractéristique à  $\tau$  fixé (qui comme on l'a vu plus haut est un objet dont la géométrie influe sur le développement BKW) contient une "boucle". Ainsi, une fréquence donnée pourra être générée autant de fois que l'on parcourt cette même boucle. Par conséquent, contrairement aux exemples décrits dans les paragraphes précédents, l'ordre de résolution du développement BKW ne sera plus aussi clairement déterminé puisqu'une fréquence peut se trouver être dans son propre passé et dans son propre futur lorsque l'on suit les rayons de l'optique géométrique.

Avant de donner un résultat dans un cadre général de construction de développements BKW pour des problèmes à coin ayant plus de deux équations, on a trouvé à propos d'illustrer cette nouvelle condition d'inversibilité sur un exemple.

### 6.9.1 Un exemple illustratif.

Dans ce sous-paragraphe, on cherche à exhiber de façon convaincante la nécessité d'une nouvelle condition d'inversibilité en vue de construire des développements BKW sur des problèmes à coin de la forme (6.95) avec plus de deux équations.

On considère le problème à coin :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + A_1 \partial_1 u^\varepsilon + A_2 \partial_2 u^\varepsilon = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ B_1 u^\varepsilon|_{x_1=0} = 0, \\ B_2 u^\varepsilon|_{x_2=0} = g^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.96)$$

avec :

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & \frac{5}{7} & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

et pour un paramètre  $\delta \in \mathbb{R}$  fixé :

$$B_1 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} -\delta & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.97)$$

Ce système est donc composé d'un système de type "ondes" et d'une équation scalaire qui sont couplées par les conditions sur le bord.

On peut vérifier que la condition de bord définie par  $B_1$  sur la face  $\partial\Omega_1$  est strictement dissipative et donc en particulier, elle satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. La condition de bord sur la face  $\partial\Omega_2$  vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour tout  $\delta$  non nul. On a de plus le comportement suivant par rapport à la valeur de  $\delta$  :

- ◇ Si  $|\delta| > 1$ , alors la condition de bord définie par  $B_2$  est strictement dissipative.
- ◇ Si  $|\delta| = 1$ , alors la condition de bord définie par  $B_2$  est maximale dissipative.
- ◇ Si  $|\delta| < 1$ , alors la condition de bord définie par  $B_2$  est non dissipative.

Il est de plus clair que le problème à coin (6.96) est symétrique, non caractéristique, qu'il vérifie l'hypothèse 6.2.5 et enfin qu'il est géométriquement régulier au sens de la définition suivante.

**Définition 6.9.1** [MZ05] *L'opérateur  $L(\partial)$  est dit géométriquement régulier s'il vérifie la propriété suivante. Pour tout élément  $(\tau, \xi_1, \xi_2)$  non nul de la variété caractéristique  $V$ , alors :*

i) *Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(\xi_1, \xi_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $N$  fonctions analytiques sur  $\mathcal{V}$  à valeurs réelles  $\lambda_j$  telles que :*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathcal{V}, \det(\tau I + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) = \prod_{j=1}^N (\tau + \lambda_j(\xi_1, \xi_2)).$$

ii) *Il existe  $N$  fonctions analytiques sur  $\mathcal{V}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^N$ , linéairement indépendantes notées  $e_j$ , telles que*

$$\forall \xi \in \mathcal{V}, (\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) e_j(\xi_1, \xi_2) = \lambda_j(\xi_1, \xi_2) e_j(\xi_1, \xi_2). \quad (6.98)$$

Bien sûr l'hyperbolicité à multiplicité constante implique la régularité géométrique, la réciproque n'étant pas vraie. La principale différence entre ces deux classes est que la classe des opérateurs géométriquement réguliers contient des opérateurs dont les différentes feuilles de la variété caractéristique s'intersectent. Ceci est impossible dans la classe des opérateurs hyperboliques à multiplicité constante.

Pour le problème à coin (6.96), l'équation de la section de la variété caractéristique avec le plan  $\{\tau = 1\}$  est donnée par :

$$(V_{\tau=1}) \quad (-5\xi_1^2 - \xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2 + 4\xi_1 + 1) \left(1 + \frac{5}{7}\xi_1 - \xi_2\right) = 0,$$

et se compose donc d'une ellipse et d'une droite qui s'intersectent, voir la figure 6.11.

Il faut faire attention à ces points d'intersection car ils peuvent, de façon assez générique, induire une infinité de phases dans le développement BKW. En effet, on suppose qu'à un point d'intersection l'une des feuilles est associée à une vitesse de groupe entrante-sortante, tandis que la seconde est associée à une vitesse de groupe sortante-entrante. Alors, les vitesses de groupe étant régulières, sur chaque feuille on peut trouver un voisinage du point d'intersection sur lequel les vitesses de groupe ne changent pas de type. Il s'en suit que si le rayon d'optique géométrique contient une fréquence dans l'un de ces voisinages alors il est automatiquement attiré vers le point d'intersection en formant un "escalier" semblable à celui décrit dans le paragraphe 6.6.

Cependant pour l'exemple (6.96) qui nous préoccupe pour le moment, le seul phénomène de concentration au voisinage d'un point d'intersection possible fera intervenir des phases dont on sait que les amplitudes associées sont nulles (cf. paragraphe 6.8). Ainsi, les fréquences associées ne seront pas prises en compte dans le développement BKW. Le nombre de phases générées sera alors bien fini.

Dans ce sous-paragraphe, on s'intéressera plus particulièrement aux quatre amplitudes liées aux fréquences suivantes  $(1, \frac{21}{5}, 8)$ ,  $(1, 3, 8)$ ,  $(1, 3, 4)$  et  $(1, \frac{21}{5}, 4)$ . Ces fréquences qui s'avèreront être autointeragissantes, sont générées lorsque l'on choisit, par exemple, un terme source sur la face  $\partial\Omega_2$  de la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_1) = e^{\frac{i}{\varepsilon}(t + \frac{21}{5}x_1)} g(t, x_1),$$

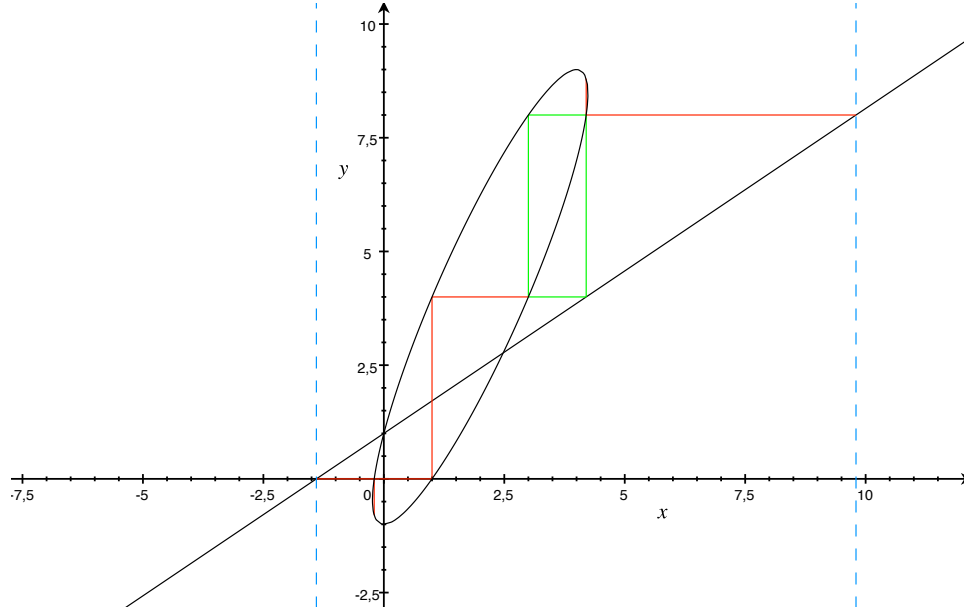


Figure 6.11: Section de la variété caractéristique et génération des phases pour le problème à coin (6.96).

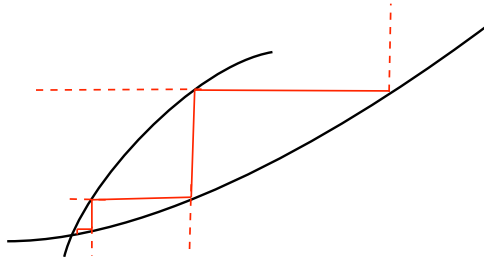


Figure 6.12: Génération d'une infinité de phases au voisinage d'un point d'intersection.

où  $g \in H_p^\infty$ , est une amplitude nulle pour les temps négatifs.

Il est intéressant de remarquer que lorsque l'on applique le procédé de génération des phases du paragraphe 6.8 on retombe plusieurs fois sur les fréquences  $(\frac{21}{5}, 8)$ ,  $(\frac{21}{5}, 4)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 8)$ , d'où le terme de "boucle".

On associe aux quatre fréquences précédentes, les phases et les vitesses de groupe suivantes :

$$\varphi_1(t, x) := t + \frac{21}{5}x_1 + 8x_2, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2(t, x) := t + \frac{21}{5}x_1 + 4x_2, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_3(t, x) := t + 3x_1 + 4x_2, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_4(t, x) := t + 3x_1 + 8x_2, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Les vitesses de groupe  $v_1$  et  $v_3$  sont sortantes-entrantes tandis que les vitesses de groupe  $v_2$  et  $v_4$

sont entrantes-sortantes. Ceci aura son importance dans le phénomène d'autointeraction entre les phases.

Si on continue d'appliquer le principe de génération des phases décrit au paragraphe 6.8, on peut montrer que les autres phases attendues dans le développement BKW sont les suivantes<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned}\varphi_0(t, x) &:= t + \frac{49}{5}x_1 + 8x_2, & \varphi_5(t, x) &:= t + x_1 + 4x_2, & \varphi_6(t, x) &:= t + x_1, \\ \varphi_7(t, x) &:= t - \frac{1}{5}x_1, & \varphi_8(t, x) &:= t - \frac{7}{5}x_1, & \varphi_9(t, x) &:= t - \frac{1}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2, \\ \varphi_{10}(t, x) &:= t - \frac{7}{5}x_1 + \frac{7}{5} \left( -2 + i \frac{\sqrt{214}}{7} \right) x_2, & \varphi_{-1}(t, x) &:= t + \frac{49}{5}x_1 + \left( \frac{98}{5} + i \frac{2\sqrt{7267}}{5^{\frac{3}{2}}} \right) x_2.\end{aligned}$$

On peut montrer que les phases  $\varphi_{10}$  et  $\varphi_{-1}$  sont évanescentes pour la face  $\partial\Omega_2$ , que les phases  $\varphi_4$ ,  $\varphi_5$ ,  $\varphi_7$  et  $\varphi_8$  sont entrantes-sortantes, que la phase  $\varphi_6$  est sortante-entrante et qu'enfin la phase  $\varphi_9$  est entrante-entrante.

Cependant, dans la suite de ce paragraphe, bien que l'on puisse le faire (au prix de quelques calculs), on ne cherchera pas à déterminer explicitement les amplitudes liées à ces phases. En effet, il sera suffisant de vérifier que le théorème 6.9.2 s'applique pour établir l'existence du développement BKW. Cette vérification passe par l'étude du phénomène d'interaction des quatre fréquences de la "boucle", c'est pourquoi on pousse plus avant l'étude de ces quatre fréquences en calculant les sous-espaces stables associés :

$$\begin{aligned}E_2^s \left( i, \frac{21}{5} \right) &:= \text{vect} \{e_1\}, \quad e_1 := \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \\ E_2^s(i, 3) &:= \text{vect} \{e_3\}, \quad e_3 := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.99}$$

et

$$\begin{aligned}E_1^s(i, 4) &:= \text{vect} \{e_2, e_5\}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_5 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \\ E_1^s(i, 8) &:= \text{vect} \{e_4, e_0\}, \quad e_4 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad e_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{6.100}$$

On calcule aussi les inverses données par la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme :

$$\phi_1(i, 4) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{7}} & -\frac{1}{6\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{5}{6\sqrt{7}} & \frac{5}{6\sqrt{7}} \end{bmatrix}, \quad \phi_1(i, 8) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4\sqrt{7}} & -\frac{1}{4\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{4\sqrt{7}} & \frac{3}{4\sqrt{7}} \end{bmatrix};$$

---

<sup>4</sup>En appliquant le procédé de génération des phases, on remarque que le seul moment où l'on pourrait venir se concentrer au voisinage d'un point d'intersection, et ainsi créer une infinité de phases, est lorsque l'on cherche les rebonds de la phase entrante-sortante  $\varphi_2$ , ou de façon équivalente, lorsque que l'on recherche les racines en  $\xi_2$  de l'équation

$$\det(\mathcal{L}(1, 3, \xi_2)) = 0.$$

L'une des solutions est associée à la phase  $\varphi_3$  qui se réfléchira en  $\varphi_4$  et  $\varphi_5$ , phases qui ne peuvent se concentrer vers le point d'intersection. La deuxième solution se trouve sur la droite d'équation  $\{1 + \frac{5}{7}\xi_1 - \xi_2 = 0, (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2\}$  est entrante-sortante et est donc écartée d'après le paragraphe 6.8.



ainsi que

$$\phi_2(i, 3) = \frac{1}{3\delta} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad \phi_2\left(i, \frac{21}{5}\right) = \frac{3}{7\delta} \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

On postule l'ansatz suivant

$$u^\varepsilon \sim \sum_{j=0}^9 e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi_j} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n,j} + \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \left( e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi_{-1}(t, x_1, 0)} U_{n,-1}\left(t, x, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) + e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi_{10}(t, x_1, 0)} U_{n,10}\left(t, x, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \right). \quad (6.101)$$

Comme précédemment indiqué, on ne s'intéresse pas ici à la construction de toutes les amplitudes dans le développement BKW mais seulement au phénomène d'autointeraction entre les quatres phases  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  et  $\varphi_4$ . C'est pourquoi, on ne donnera pas ici l'espace des profils évanescents pour la face  $\partial\Omega_2$ .

Par polarisation des amplitudes de degré zéro, on peut écrire

$$\forall i \in \{1, \dots, 4\}, \quad u_{0,i}(t, x) := \lambda_i(t, x) e_i,$$

où les vecteurs  $e_i$  sont définis en (6.99) et (6.100). D'après le lemme de Lax [Lax57], l'amplitude  $\lambda_1$  doit vérifier l'équation de transport :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_1 \cdot \nabla_x) \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1|_{x_2=0} = \frac{3}{7\delta} \left[ g - \lambda_2|_{x_2=0} \right], \\ \lambda_1|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Donc,  $\lambda_1$  dépend de la trace sur  $\partial\Omega_2$  de la "seconde" amplitude du problème seulement. En intégrant le long des caractéristiques, on obtient :

$$\lambda_1(t, x) = \frac{3}{7\delta} \left[ g - \lambda_2|_{x_2=0} \right] \left( t - \frac{5}{2} x_2, x_1 + \frac{15}{2} x_2 \right). \quad (6.102)$$

Or pour déterminer la trace sur  $\partial\Omega_2$  de  $\lambda_2$ , cette dernière étant une amplitude associée à une phase entrante-sortante, il suffit de déterminer sa trace sur  $\partial\Omega_1$ . Il est ici instructif de se pencher en détail sur la condition de bord sur la face  $\partial\Omega_1$ , cette dernière s'écrit sous la forme :

$$B_1 [u_{0,2} + u_{0,5}]_{|x_1=0} = -B_1 u_{0,3},$$

et il suffit d'appliquer la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour obtenir :

$$\lambda_2|_{x_1=0} e_2 + \lambda_5|_{x_1=0} e_5 = -\lambda_3|_{x_1=0} \phi_1(i, 4) B_1 e_3.$$

Ainsi puisque le membre de droite de cette égalité est un vecteur de  $E_1^s(i, 4)$  dont les vecteurs  $e_2$  et  $e_5$  forment une base, on obtient après un simple calcul :

$$\begin{cases} \lambda_2|_{x_1=0} = \frac{\sqrt{35}}{16} [1 - 3\sqrt{5}] \lambda_3|_{x_1=0}, \\ \lambda_5|_{x_1=0} = -\frac{1}{6} [\sqrt{5} - 3] \lambda_3|_{x_1=0}. \end{cases}$$

Ceci montre que la connaissance de la trace  $\lambda_3|_{x_1=0}$  permet de déterminer les amplitudes  $\lambda_2$  et  $\lambda_5$  en résolvant les équations de transport :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_2 \cdot \nabla_x) \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2|_{x_1=0} = \frac{\sqrt{35}}{16} [1 - 3\sqrt{5}] \lambda_3|_{x_1=0}, \\ \lambda_2|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\partial_t + v_5 \cdot \nabla_x) \lambda_5 = 0, \\ \lambda_5|_{x_1=0} = -\frac{1}{6} [\sqrt{5} - 3] \lambda_3|_{x_1=0}, \\ \lambda_5|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Comme précédemment indiqué on ne s'intéresse pas ici à l'amplitude  $\lambda_5$ . Néanmoins, il est intéressant de remarquer, pour l'étude du cas général qui va suivre au paragraphe 6.9.3, que la connaissance d'une seule trace permet parfois de déterminer plusieurs amplitudes. En intégrant l'équation de transport sur  $\lambda_2$  le long des caractéristiques, on détermine  $\lambda_2$  en fonction de  $\lambda_3$  :

$$\lambda_2(t, x) = \frac{\sqrt{35}}{16} [1 - 3\sqrt{5}] \lambda_3 \left( t - \frac{7}{5}x_1, 0, x_2 + \frac{7}{5}x_1 \right). \quad (6.103)$$

Enfin résolvant les équations de transport :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + v_3 \cdot \nabla_x) \lambda_3 = 0, \\ \lambda_{3|_{x_2=0}} = -\frac{1}{3} \lambda_{4|_{x_2=0}}, \\ \lambda_{3|_{t \leq 0}} = 0, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + v_4 \cdot \nabla_x) \lambda_4 = 0, \\ \lambda_{4|_{x_1=0}} = \frac{1}{4} \left[ \frac{7}{3} - \sqrt{5} \right] \lambda_{1|_{x_1=0}}, \\ \lambda_{4|_{t \leq 0}} = 0, \end{array} \right.$$

on obtient :

$$\lambda_3(t, x) = -\frac{1}{3} \lambda_4 \left( t - \frac{x_2}{2}, x_1 + \frac{5}{2}x_2, 0 \right), \quad (6.104)$$

$$\lambda_4(t, x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{7}{3} - \sqrt{5} \right] \lambda_1 \left( t - \frac{x_1}{3}, 0, x_2 + \frac{2}{3}x_1 \right). \quad (6.105)$$

Par conséquent, combinant les équations (6.102)-(6.103)-(6.104) et (6.105) on obtient l'équation fonctionnelle suivante pour la trace de  $\lambda_1$  sur  $\partial\Omega_1$  :

$$\lambda_1(t, 0, x_2) = -\frac{\sqrt{5}}{64\sqrt{7}\delta} [1 - 3\sqrt{5}] \left[ \frac{7}{3} - \sqrt{5} \right] \lambda_1 \left( t - 27x_2, 0, \frac{35}{2}x_2 \right) + (Fg), \quad (6.106)$$

où  $F$  est un opérateur explicitement calculable mais dont l'expression est de peu d'intérêt.

L'équation (6.106) montre bien que la trace de l'amplitude  $\lambda_1$  sur la face  $\partial\Omega_1$  est autointeragissante, et que la détermination du développement BKW passe par la résolution d'équations fonctionnelles du type (6.106).

On peut remarquer au passage que le facteur  $\frac{35}{2}$  dans l'équation fonctionnelle (6.106) est le produit des pentes des vitesses de groupe de la "boucle" :

$$\frac{35}{2} = \frac{v_{1,1}}{v_{1,2}} \frac{v_{2,2}}{v_{2,1}} \frac{v_{3,1}}{v_{3,2}} \frac{v_{4,2}}{v_{4,1}}.$$

Comme indiqué à la fin du paragraphe 6.6, ce nombre étant supérieur à 1, on est en présence d'une concentration dans le coin. Cependant, cette fois les vitesses de groupe sont constantes donc la suite  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  qui représente l'abscisse d'un point initialement en  $(x_0, 0)$  après avoir parcouru  $p$  fois la boucle, est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{35}$ . Ceci implique que la suite  $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$  qui représente le temps nécessaire pour parcourir la boucle la  $p$ -ième fois est aussi (au facteur  $\frac{1}{5}(14 + 25\sqrt{5})$  près) une suite géométrique de raison  $\frac{2}{35}$ . Ainsi, le temps de concentration au coin est **fini**.

On reviendra au sous-paragraphe 6.9.5 sur la résolution de l'équation fonctionnelle (6.106). En particulier, on y verra que le fait que l'équation (6.106) admette une unique solution impose une contrainte sur le paramètre  $\delta$ . Par conséquent, déterminer le développement BKW ne pourra se faire uniquement en imposant la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur les deux faces du bord.

On conclut ce sous-paragraphe en donnant les figures 6.13, 6.14 et 6.15 qui représentent l'allure des bicaractéristiques du problème à coin (6.96).

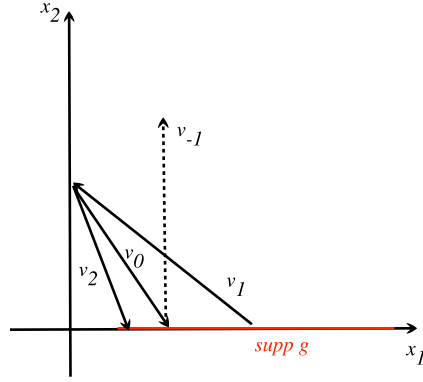
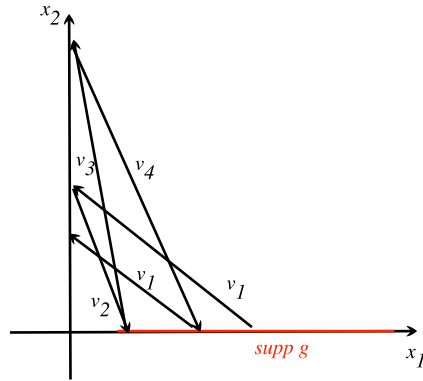
Figure 6.13: Allure des bicaractéristiques de "l'avant" boucle, le rebond  $1 \rightarrow 2$  et ses descendants.

Figure 6.14: Allure des bicaractéristiques de la boucle.

### 6.9.2 Cadre formel.

Dans ce sous-paragraphe on donne un cadre formel dans lequel on peut construire rigoureusement un développement BKW. Comme on l'a déjà mentionné, la géométrie de la variété caractéristique conditionne le développement BKW d'un problème à coin ; c'est pourquoi on commence ici par donner un cadre pour lequel la dépendance par rapport à cette géométrie est "minimale". Néanmoins, on prendra en compte le phénomène de "boucle" et d'autointeraction pour certains rayons de l'optique géométrique.

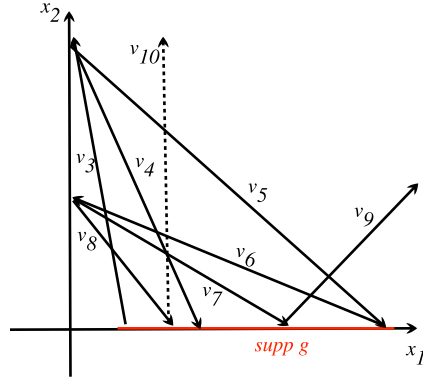
#### Définition de l'ensemble des fréquences.

Afin de simplifier un peu la description de l'ensemble des fréquences que l'on s'attend à voir dans le développement BKW, on travaille ici avec des systèmes strictement hyperboliques. C'est-à-dire que l'hypothèse d'hyperbolicité suivante est satisfaite :

**Hypothèse 6.9.1** *Il existe  $N$  fonctions, notées  $\lambda_j$ , analytiques sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et à valeurs réelles telles que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^1, \det(\tau + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2) = \prod_{k=1}^N (\tau + \lambda_k(\xi)),$$

où les valeurs propres  $\lambda_i(\xi)$  vérifient  $\lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_N(\xi)$ .

Figure 6.15: Allure des bicaractéristiques de "l'après" boucle, le rebond  $3 \rightarrow 4$  et ses descendants.

Cette restriction par rapport au cadre hyperbolique à multiplicité constante où l'on s'est placé jusqu'ici n'est toutefois pas nécessaire pour la définition du cadre formel dans lequel on se place. L'intérêt de cette restriction est plutôt de simplifier grandement l'étude de la condition d'inversibilité sous laquelle on construit le développement BKW, voir le sous-paragraphe 6.9.5.

**Définition 6.9.2** Soit  $\mathcal{I}$  une partie de  $\mathbb{N}$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ . Un ensemble indexé par  $\mathcal{I}$ ,

$$\mathcal{F} := \{f_i := (\tau, \xi_1^i, \xi_2^i), i \in \mathcal{I}\},$$

sera un ensemble de fréquences pour le problème à coin (6.95) si pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $f_i$  vérifie

$$\det(\mathcal{L}(f_i)) = 0, \quad f_i \neq 0,$$

ainsi que l'une des alternatives suivantes :

- i)  $\xi_1^i, \xi_2^i \in \mathbb{R}$ .
- ii)  $\xi_1^i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}), \xi_2^i \in \mathbb{R}$  et  $\text{Im } \xi_1^i > 0$ .
- iii)  $\xi_2^i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}), \xi_1^i \in \mathbb{R}$  et  $\text{Im } \xi_2^i > 0$ .

Dans la suite de cette démonstration, pour un ensemble de fréquences  $\mathcal{F}$  pour le problème à coin (6.95), on posera :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{os} &:= \{f_i \in \mathcal{F} \text{ vérifiant i)}\}, \\ \mathcal{F}_{ev1} &:= \{f_i \in \mathcal{F} \text{ vérifiant ii)}\}, \\ \mathcal{F}_{ev2} &:= \{f_i \in \mathcal{F} \text{ vérifiant iii)}\}. \end{aligned}$$

Il est alors clair que les ensembles  $\mathcal{F}_{os}$ ,  $\mathcal{F}_{ev1}$  et  $\mathcal{F}_{ev2}$  forment une partition de  $\mathcal{F}$ . De plus, on peut associer à chaque élément  $f_i$  de  $\mathcal{F}_{os}$  une vitesse de groupe  $v_i := (v_{i,1}, v_{i,2})$ . On rappelle que  $v_i$  est définie par  $v_i := \nabla \lambda_{k_i}(\xi_1^i, \xi_2^i)$ , où l'indice  $k_i$  est l'entier tel que :

$$\tau + \lambda_{k_i}(\xi_1^i, \xi_2^i) = 0.$$

Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{F}_{os}$  se partitionne selon les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ee} &:= \{f_i \in \mathcal{F}_{os} \setminus v_{i,1}, v_{i,2} > 0\}, \quad \mathcal{F}_{es} := \{f_i \in \mathcal{F}_{os} \setminus v_{i,1} > 0, v_{i,2} < 0\}, \\ \mathcal{F}_{se} &:= \{f_i \in \mathcal{F}_{os} \setminus v_{i,1} < 0, v_{i,2} > 0\}, \quad \mathcal{F}_{ss} := \{f_i \in \mathcal{F}_{os} \setminus v_{i,1} < 0, v_{i,2} < 0\}. \\ \mathcal{F}_g &:= \{f_i \in \mathcal{F}_{os} \setminus v_{i,1} = 0 \text{ ou } v_{i,2} = 0\}. \end{aligned}$$

On retranscrit la partition de  $\mathcal{F}$  de la façon suivante sur l'ensemble des indices  $\mathcal{I}$  :

$$\mathcal{I} := \mathcal{I}_g \cup \mathcal{I}_{ss} \cup \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{se} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1} \cup \mathcal{I}_{ev2},$$

où l'on a posé  $\mathcal{I}_{es}$  (resp.  $g, ss, se, ee, ev1, ev2$ ) l'ensemble des indices  $i \in \mathcal{I}$  tels que la fréquence  $f_i$  associée soit dans  $\mathcal{F}_{es}$  (resp.  $g, ss, se, ee, ev1, ev2$ ). Dans un souci d'allègement des notations, on fera souvent l'amalgame entre un ensemble de fréquences  $\mathcal{F}$  et l'ensemble des indices  $\mathcal{I}$  par lequel il est indexé.

On travaillera toujours dans ce paragraphe avec un terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  qui s'écrit sous la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_2) := e^{\frac{i}{\varepsilon}(\tau t + \xi_2 x_2)} g(t, x_2), \quad (6.107)$$

où  $g \in H_p^\infty$ , est une amplitude nulle pour les temps négatifs.

La définition suivante donne un cadre formel au principe de génération des phases que l'on a décrit au paragraphe 6.8. Plus précisément, cette définition qualifie les ensembles de fréquences qui contiennent toutes (et uniquement) les fréquences associées à des amplitudes qui seront non nulles dans le développement BKW de la solution  $u^\varepsilon$  du problème à coin (6.95).

**Définition 6.9.3** *Le problème à coin (6.95) est qualifié de complet pour les réflexions s'il existe un ensemble de fréquences  $\mathcal{F}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

*i)  $\mathcal{F}$  contient les racines (dans la variable  $\xi_1$ ) réelles associées à des vitesses de groupe entrantes-sortantes **ou** entrantes-entrantes ainsi que les racines complexes de partie imaginaire strictement positive, de l'équation*

$$\det(\mathcal{L}(\tau, \xi_1, \xi_2)) = 0.$$

*ii)  $\mathcal{F}_g = \emptyset$ .*<sup>5</sup>

*iii) Si  $(\tau, \xi_1^i, \xi_2^i) \in \mathcal{F}_{es}$ , alors  $\mathcal{F}$  contient toutes les racines en  $\xi_2$  de l'équation  $\det(\mathcal{L}(\tau, \xi_1^i, \xi_2)) = 0$ , notées  $\xi_2^p$ , qui vérifient l'une des deux alternatives suivantes :*

*iii')  $\xi_2^p \in \mathbb{R}$  et la fréquence  $(\tau, \xi_1^i, \xi_2^p)$  a une vitesse de groupe sortante-entrante ou entrante-entrante.*

*iii'')  $\text{Im } \xi_2^p > 0$ .*

*iv) Si  $(\tau, \xi_1^i, \xi_2^i) \in \mathcal{F}_{se}$ , alors  $\mathcal{F}$  contient toutes les racines en  $\xi_1$  de l'équation  $\det(\mathcal{L}(\tau, \xi_1, \xi_2^i)) = 0$ , notées  $\xi_1^p$ , qui vérifient l'une des deux alternatives suivantes :*

*iv')  $\xi_1^p \in \mathbb{R}$  et la fréquence  $(\tau, \xi_1^p, \xi_2^i)$  a une vitesse de groupe entrante-sortante ou entrante-entrante.*

*iv'')  $\text{Im } \xi_1^p > 0$ .*

*v)  $\mathcal{F}$  est minimal au sens de l'inclusion pour les quatres propriétés précédentes.*

**Remarque** Le point *i*) revient à demander que l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$  contienne bien toutes les fréquences qui sont générées par le terme source  $g^\varepsilon$ .

Le point *iii*) (resp. *iv*)) correspond à la génération par réflexion sur la face  $\partial\Omega_2$  (resp.  $\partial\Omega_1$ ) d'un paquet d'ondes qui émane de la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ).

Une conséquence immédiate de la condition de minimalité de  $\mathcal{F}$  au sens de l'inclusion est que tout ensemble de fréquences complet pour les réflexions vérifie nécessairement :

$$\mathcal{F}_{ss} = \emptyset.$$

<sup>5</sup>Cette restriction n'est probablement pas nécessaire en soi. Cependant, pour un premier travail sur le sujet on a trouvé opportun de ne pas rentrer dans la grande technicité induite par la détermination des amplitudes liées aux phases de "glancing" dans le développement BKW (voir [Wil00] pour le cas du problème aux limites standard).

On supposera que la relation de dispersion  $\det(\mathcal{L}(\underline{\tau}, \xi_1, \xi_2)) = 0$  admet au moins une solution réelle  $\underline{\xi}_1$ , telle que la vitesse de groupe associée à la fréquence  $\underline{f} := (\underline{\tau}, \underline{\xi}_1, \underline{\xi}_2)$  soit entrante-sortante. Cette hypothèse n'est bien sûr pas nécessaire. Cependant, si cette dernière n'est pas satisfaite, on voit facilement que la génération des phases pour le problème à coin (6.95) n'est pas plus riche que celle pour le problème aux limites standard dans le demi-espace  $\{x_1 \geq 0\}$ , pour lequel le développement BKW a déjà été construit. En effet, la minimalité de l'ensemble des fréquences implique alors, dans ce cas, que

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{ee} \cup \mathcal{F}_{ev1} \text{ et } \forall f_i \in \mathcal{F}, \xi_2^i = \underline{\xi}_2.$$

Pour un problème à coin complet pour les réflexions on peut définir les deux applications suivantes qui, étant donné un indice, associent les indices "voisins" de cet indice :

$$\Phi, \Psi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{P}_N(\mathcal{I}),$$

où  $\mathcal{P}_N(\mathcal{I})$  désigne l'ensemble des parties de  $\mathcal{I}$  ayant au plus  $N$  éléments. Plus précisément, les définitions de  $\Phi$  et  $\Psi$  sont les suivantes : pour  $i \in \mathcal{I}$ ,  $f_i = (\underline{\tau}, \xi_1^i, \xi_2^i)$ ,

$$\Phi(i) := \left\{ j \in \mathcal{I} \setminus \xi_2^j = \xi_2^i \right\},$$

$$\Psi(i) := \left\{ j \in \mathcal{I} \setminus \xi_1^j = \xi_1^i \right\}.$$

On introduit en grande partie ces applications  $\Phi$  et  $\Psi$  pour munir l'ensemble des indices  $\mathcal{I}$  d'une structure de graphe qui sera plus abstraite mais plus facile à manipuler, dans la suite de la démonstration, qu'une structure basée sur la réflexion des rayons. Cette structure est la suivante : deux indices  $i$  et  $j$  seront dits voisins dans  $\mathcal{I}$  si  $j \in \Phi(i)$  ou  $j \in \Psi(i)$ .

En terme de réflexion de paquet d'ondes, l'ensemble  $\Phi(i)$  (resp.  $\Psi(i)$ ) représente l'ensemble des phases obtenues lors d'une réflexion sur la face  $\partial\Omega_2$  (resp.  $\partial\Omega_1$ ) d'un rayon incident pour cette face, ainsi que l'indice associé à ce rayon. On insiste ici sur le fait que l'indice  $i$  n'est pas nécessairement associé au rayon incident mais peut être associé à l'un des rayons réfléchis.

On peut donner les propriétés suivantes des applications  $\Phi$  et  $\Psi$ . On insiste sur le fait que ces propriétés sont indépendantes de la notion de boucle que l'on va introduire dans le sous-paragraphe suivant.

**Proposition 6.9.1** *Si le problème à coin (6.95) est complet pour les réflexions, alors les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifient les propriétés suivantes :*

$$i) \forall i \in \mathcal{I}, i \in \Psi(i), i \in \Phi(i).$$

$$ii) \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \Psi(i), \forall k \in \Phi(i) \text{ on a } \Psi(i) = \Psi(j) \text{ et } \Phi(i) = \Phi(k).$$

$$iii) \forall i \in \mathcal{I}_{os}, \Phi(i) \cap \mathcal{I}_{ev2} = \emptyset \text{ et } \Psi(i) \cap \mathcal{I}_{ev1} = \emptyset. \text{ Et, } \forall i \in \mathcal{I}_{ev1}, \forall j \in \mathcal{I}_{ev2}, \text{ on a } \Psi(i) \subset \mathcal{I}_{ev1}, \Phi(j) \subset \mathcal{I}_{ev2}.$$

$$iv) \forall i \in \mathcal{I}_{os}, \#(\Phi(i) \cap \mathcal{I}_{ev1} \cap \mathcal{I}_{es} \cap \mathcal{I}_{ee}) \leq p_1, \text{ et } \#(\Psi(i) \cap \mathcal{I}_{ev2} \cap \mathcal{I}_{se} \cap \mathcal{I}_{ee}) \leq p_2.$$

$$v) \forall i \in \mathcal{I}, \text{ on a d'une part } \forall i_1, i_2 \in \Phi(i), i_1 \neq i_2 :$$

$$\Phi(i) \cap \Psi(i_1) = \{i_1\} \text{ et } \Psi(i_1) \cap \Psi(i_2) = \emptyset,$$

et d'autre part,  $\forall j_1, j_2 \in \Psi(i), j_1 \neq j_2 :$

$$\Psi(i) \cap \Phi(j_1) = \{i_1\} \text{ et } \Phi(j_1) \cap \Phi(j_2) = \emptyset.$$

**Démonstration :** Les points  $i$ ),  $ii$ ) et  $v$ ) sont des conséquences des définitions des applications  $\Phi$  et  $\Psi$ . De même, le point  $iii$ ) découle de la définition d'ensemble de fréquences. Le point  $iv$ ), quant à lui, est une conséquence de la structure de blocs (cf. lemme 6.2.1).

□

Les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  permettent de définir facilement ce que l'on entend par deux indices reliés, ou en terme de réflexion de paquets d'ondes, le fait qu'un rayon associé à un indice  $i$  ait généré un rayon associé à un indice  $j$  après un certain nombre de rebonds :

**Définition 6.9.4** Si  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{es}$ , on dit que l'indice  $j \in \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ev1}$  (resp.  $j \in \mathcal{I}_{se} \cup \mathcal{I}_{ev2}$ ) est relié à l'indice  $\underline{i}$ , s'il existe  $p \in 2\mathbb{N} + 1$  (resp.  $p \in 2\mathbb{N}$ ) et une suite d'indices  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \in \mathcal{I}^p$  vérifiant la propriété suivante :

$\alpha')$   $\ell_1 \in \Psi(\underline{i}) \cap \mathcal{I}_{se}$ ,  $\ell_2 \in \Phi(\ell_1) \in \mathcal{I}_{es}$ , ...,  $j \in \Phi(\ell_p)$  (resp.  $j \in \Psi(\ell_p)$ ).

On dit que l'indice  $j \in \mathcal{I}_{ee}$  est relié à l'indice  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{es}$ , s'il existe une suite  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \in \mathcal{I}^p$  vérifiant :

$\beta')$   $\ell_1 \in \Psi(\underline{i}) \cap \mathcal{I}_{se}$ ,  $\ell_2 \in \Phi(\ell_1) \cap \mathcal{I}_{es}$ , ...,  $\begin{cases} j \in \Phi(\ell_p), & p \text{ est impair,} \\ j \in \Psi(\ell_p), & p \text{ est pair.} \end{cases}$

Si  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{se}$ , on dit que l'indice  $j \in \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ev1}$  (resp.  $j \in \mathcal{I}_{se} \cup \mathcal{I}_{ev2}$ ) est relié à l'indice  $\underline{i}$ , s'il existe  $p \in 2\mathbb{N}$  (resp.  $p \in 2\mathbb{N} + 1$ ) et une suite d'indices  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \in \mathcal{I}^p$  vérifiant :

$\alpha'')$   $\ell_1 \in \Phi(\underline{i}) \cap \mathcal{I}_{es}$ ,  $\ell_2 \in \Psi(\ell_1) \in \mathcal{I}_{se}$ , ...,  $j \in \Phi(\ell_p)$  (resp.  $j \in \Psi(\ell_p)$ ).

On dit que l'indice  $j \in \mathcal{I}_{ee}$  est relié à l'indice  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{se}$ , s'il existe une suite  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \in \mathcal{I}^p$  vérifiant :

$\beta'')$   $\ell_1 \in \Phi(\underline{i}) \cap \mathcal{I}_{es}$ ,  $\ell_2 \in \Psi(\ell_1) \cap \mathcal{I}_{se}$ , ...,  $\begin{cases} j \in \Psi(\ell_p), & p \text{ est impair,} \\ j \in \Phi(\ell_p), & p \text{ est pair.} \end{cases}$

Par convention tout indice est relié à lui-même en zéro réflexions.

Enfin, si  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1} \cup \mathcal{I}_{ev2}$ , aucun élément de  $\mathcal{I}$  autre que  $\underline{i}$  n'est relié à  $\underline{i}$ .

De plus, on dira qu'un indice  $j \in \mathcal{I}$  est relié à l'indice  $\underline{i}$  par une suite de type  $H$  (pour "horizontale") (resp.  $V$  (pour "verticale")) et on notera  $i \xrightarrow{H} j$  (resp.  $i \xrightarrow{V} j$ ) si la suite  $(\underline{i}, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p, j)$  vérifie  $\alpha'')$  ou  $\beta'')$  (resp.  $\alpha')$  ou  $\beta')$ .

On va expliciter un peu cette définition. Si on se fixe un indice  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{es}$ , dire qu'un indice  $j$  est relié à l'indice  $\underline{i}$  veut dire qu'il a été généré après un certain nombre de rebonds d'un rayon initialement associé à l'indice  $\underline{i}$ . Plus précisément, le rayon associé à l'indice entrant-sortant  $\underline{i}$  a frappé la face  $\partial\Omega_2$ , s'y est réfléchi en un rayon sortant-entrant associé à l'indice  $\ell_1$ . Ce rayon a ensuite frappé la face  $\partial\Omega_1$  et a généré par réflexion le rayon associé à l'indice entrant-sortant  $\ell_2$  qui est ensuite aller frapper la face  $\partial\Omega_2$ ... Ceci jusqu'à ce que le rayon associé à l'indice  $\ell_p$  génère par réflexion sur l'une des faces l'indice  $j$ .

L'étude de cas selon la nature de l'indice  $j$  dans le sous-cas  $\alpha')$  est alors juste là pour prendre en compte le fait qu'un rayon associé à un indice dans  $\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ev1}$  (resp.  $\mathcal{I}_{se} \cup \mathcal{I}_{ev2}$ ) n'a pu être généré par le rayon associé à  $\ell_p$  que lors d'une réflexions sur la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ), ou de façon équivalente après un nombre pair (resp. impair) de rebonds. Tandis qu'un rayon associé à un indice  $j \in \mathcal{I}_{ee}$  peut avoir été généré par le rayon porté par  $\ell_p$  à la suite d'une réflexion sur l'une des deux faces, d'où le sous-cas  $\beta')$ .

Si on voit plutôt l'ensemble  $\mathcal{I}$  comme un arbre, dire que  $j$  est relié à  $\underline{i}$  revient à dire que l'on peut en partant de  $\underline{i}$  atteindre  $j$  en passant par des indices  $\ell_i$ , tout en adoptant la règle suivante : si

on atteint  $\ell_l$  en suivant une ligne verticale (resp. horizontale) alors on atteindra  $\ell_{l+1}$  en suivant une ligne horizontale (resp. verticale). La notion de suite de type  $H$  (resp.  $V$ ) facilitera la démonstration de la structure arborée de  $\mathcal{I}$  et signifie juste que lorsque l'on démarre de  $\underline{i}$ , on commence par suivre une ligne horizontale (resp. verticale).

La proposition suivante est immédiate. C'est une conséquence de la minimalité d'un ensemble des fréquences complet pour les réflexions et de la définition d'indices reliés.

**Proposition 6.9.2** *Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de fréquences complet pour les réflexions indexé par  $\mathcal{I}$ . On introduit  $\mathcal{I}_0$  l'ensemble des indices de  $\mathcal{I}$  qui sont associés à des phases générées par le terme source  $g^\varepsilon$ , i.e.*

$$\mathcal{I}_0 := \{i \in \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1} \mid \det(\mathcal{L}(\underline{i}, \xi_1^i, \xi_2)) = 0\}.$$

On note  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  l'ensemble des indices de  $\mathcal{I}$  reliés aux éléments de  $\mathcal{I}_0$ . Alors, par convention  $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  et de plus

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = \mathcal{I}.$$

**Démonstration :** On pose  $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$  l'ensemble des fréquences associées à l'ensemble d'indices  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ . Par construction, il est clair que l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$  vérifient les deux premiers points de la définition 6.9.3. Montrons que  $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$  vérifie également le point *iii*) de la définition 6.9.3.

On fixe  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ , un indice entrant-sortant. On note  $\underline{\ell}$  la suite qui le relie à l'un des éléments de  $\mathcal{I}_0$ . Alors les indices sortants-entrants, entrants-entrants et évanescents pour la face  $\partial\Omega_2$  de  $\Psi(\underline{i})$  sont reliés à un élément de  $\mathcal{I}_0$  par la suite  $(\underline{\ell}, \underline{i})$ , ils sont donc dans  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ . Ainsi  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$  satisfait le point *iii*) de la définition 6.9.3.

La démonstration du fait que  $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$  vérifie le point *iv*) de la définition 6.9.3 se fait de façon totalement analogue.

Or puisque  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{I}$  et que les ensembles de fréquences associés  $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{F}$  vérifient tout deux les points *i*), *ii*) *iii*) et *iv*), la minimalité de  $\mathcal{F}$  implique que  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = \mathcal{I}$ .

□

A ce stade de l'analyse, on ne fait pas l'hypothèse de finitude du nombre de phases dans l'ensemble des fréquences. En effet, on construit ici des développements BKW formels. L'hypothèse " $\#\mathcal{F} < +\infty$ " n'interviendra qu'après la construction du développement BKW pour justifier sa pertinence.

### Ensemble des fréquences à boucle.

Comme indiqué au début de ce paragraphe, le but que l'on s'est donné est de construire rigoureusement le développement BKW d'un problème à coin pour lequel certaines amplitudes dans le développement subissent un phénomène d'autointeraction. Pour cela, on considère des problèmes à coin dont la variété caractéristique contient une "boucle". Par boucle, on entend qu'il est possible de trouver au moins quatre points de  $V \cap \{\tau = \underline{\tau}\}$  (ou de façon équivalente, quatre fréquences dans  $\mathcal{F}$ ) telles que si l'on trace les segments reliant ces points, on obtienne un rectangle ou un "escalier" de taille finie (cf. [SS75] figure 8).

De nombreux types de boucles sont possibles et peu d'entre eux donnent effectivement naissance à un phénomène d'autointeraction. C'est pourquoi, dans la suite de cette démonstration, on suposera pour simplifier qu'il existe une unique boucle et que cette dernière induit un phénomène d'autointeraction. La restriction d'unicité n'est probablement pas nécessaire en soi mais elle permet de simplifier grandement l'analyse et réduit la complexité rédactionnelle de la démonstration. On donnera dans le sous-paragraphe 6.9.7 quelques éléments de démonstration dans le cas où une boucle d'autointeraction cohabite avec une boucle de non autointeraction. Ces deux types de boucles sont introduits dans la définition suivante :



**Définition 6.9.5** Soit  $i \in \mathcal{I}$ ,  $p \in 2\mathbb{N} + 1$  et  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{I}$  (non nécessairement deux à deux distincts).

- On dit qu'un indice  $i \in \mathcal{I}$  admet une boucle si  $\ell$  vérifie :

$$\ell_1 \in \Phi(i), \ell_2 \in \Psi(\ell_1), \dots, i \in \Psi(\ell_p).$$

- On dira qu'une boucle pour un indice  $i$  est simple si la suite  $(i, \ell)$  ne contient pas de sous-suite se répétant périodiquement.
- On dira qu'un indice  $i \in \mathcal{I}_{es}$  (resp.  $i \in \mathcal{I}_{se}$ ) admet une boucle d'autointeraction si  $i$  admet une boucle simple et si la suite  $(i, \ell, i)$  est une suite de type  $V$  (resp.  $H$ ) au sens de la définition 6.9.4.

Dans tout ce qui suit, on se placera donc sous l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 6.9.2** On suppose que l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$  admet une unique boucle. Cette boucle est de taille 3 et est une boucle d'autointeraction. C'est-à-dire que les propriétés suivantes sont vérifiées :

vi)  $\exists (n_1, n_3) \in \mathcal{I}_{es}^2, (n_2, n_4) \in \mathcal{I}_{se}^2$  tels que

$$n_4 \in \Psi(n_1), n_3 \in \Phi(n_4), n_2 \in \Psi(n_3), n_1 \in \Phi(n_2).$$

vii) Soit  $i \in \mathcal{I}$  un point admettant une boucle que l'on peut supposer simple  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ . Alors  $p = 3$  et  $\{i, \ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ .

L'une des principales difficultés induite par la présence d'une boucle est que les définitions d'indices reliés ne permettent plus de définir une relation d'ordre sur l'ensemble des fréquences comme dans le cas  $N = 2$ . En effet, si on considère les deux indices  $n_1$  et  $n_3$  de l'hypothèse 6.9.2 alors on a  $n_1 \xrightarrow{V} n_3$  et  $n_3 \xrightarrow{V} n_1$  mais  $n_1 \neq n_3$ . On verra au sous-paragraphe 6.9.3 comment surmonter cette difficulté.

On conclut ce paragraphe par la définition de ce que l'on entend par un rayon "piégé".

**Définition 6.9.6** Un rayon de l'optique géométrique est dit piégé si lorsque l'on suit les courbes bicaractéristiques qui le composent, on ne rencontre jamais de phases entrantes-entrantes ou bien évanescentes pour l'une des faces. En particulier, s'il existe une séquence de phases se répétant de façon périodique dans un rayon piégé, il sera qualifié de rayon piégé répété.

On remarque donc que le rayon qui consiste à suivre les bicaractéristiques associées aux indices  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  est un rayon piégé répété. De même, le rayon obtenu au paragraphe 6.7 est un rayon piégé répété. Le rayon se concentrant au coin décrit dans le paragraphe 6.6 est lui un rayon piégé non répété.

### Quelques définitions, notations et conventions.

Dans toute la suite de ce sous-paragraphe on adoptera les conventions suivantes dans l'usage des variables :

◊ Les minuscules  $i$  (sauf s'il s'agit du nombre complexe usuel),  $j$  et  $k$  désigneront des éléments quelconques de  $\mathcal{I}$ . En particulier,  $k$  sera utilisé pour indexer les amplitudes du développement BKW.

◊ Les quatres éléments de  $\mathcal{I}$  définissant la boucle seront notés  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$ .

◊ Les lettres  $a, b, c$  et  $d$  (avec des indices) seront des éléments de  $\mathcal{I}$  définis de façon spécifique.

◊  $n$  désignera l'ordre dans le développement BKW de l'amplitude que l'on est en train de construire.

- ◊ Les minuscules  $l, m, q$  et  $r$  seront des entiers naturels.
- ◊ La notation  $\ell$  désignera toujours une suite d'éléments de  $\mathcal{I}$ . Sa longueur sera toujours notée  $p$ .

Pour postuler l'ansatz et pour décrire précisément les conditions de bord que l'on devra résoudre, on doit introduire les deux relations d'équivalence  $\sim_{\Phi}$  et  $\sim_{\Psi}$  définies par :

$$i \sim_{\Phi} j \iff j \in \Phi(i),$$

$$i \sim_{\Psi} j \iff j \in \Psi(i).$$

Le fait qu'il s'agisse bien de relations d'équivalence est une conséquence directe de la proposition 6.9.1.

On pose de plus  $\mathfrak{C}_1$  (resp.  $\mathfrak{C}_2$ ) l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation  $\sim_{\Phi}$  (resp.  $\sim_{\Psi}$ ). On choisit  $\mathcal{R}_1$  (resp.  $\mathcal{R}_2$ ), un ensemble de représentants pour  $\mathfrak{C}_1$  (resp.  $\mathfrak{C}_2$ ). Donc  $\mathcal{R}_1$  (resp.  $\mathcal{R}_2$ ) est un ensemble d'indices qui représentent toutes les valeurs en  $\xi_2$  (resp.  $\xi_1$ ) des fréquences. On définit ensuite  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  par :

$$\mathfrak{R}_1 := \{i \in \mathcal{R}_1 \mid \Phi(i) \cap \mathcal{I}_{ev1} \neq \emptyset\}, \quad (6.108)$$

$$\mathfrak{R}_2 := \{i \in \mathcal{R}_2 \mid \Psi(i) \cap \mathcal{I}_{ev2} \neq \emptyset\}. \quad (6.109)$$

$\mathfrak{R}_1$  (resp.  $\mathfrak{R}_2$ ) est donc un ensemble de représentants des valeurs de  $\xi_2$  (resp.  $\xi_1$ ) pour lesquelles on a un mode évanescent pour la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ). Enfin, sans perte de généralité, on peut supposer que  $n_1 \in \mathcal{R}_2$  et , c'est-à-dire que l'on choisit  $n_1$  comme représentant de sa propre classe d'équivalence.

Pour  $i \in \mathfrak{C}_1$  (resp.  $i \in \mathfrak{C}_2$ ) on rappelle que sous la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, on peut définir  $\phi_1^i$  (resp.  $\phi_2^i$ ) l'inverse de  $B_1$  (resp.  $B_2$ ) restreinte au sous-espace stable  $E_1^s(i_{\mathcal{I}}, \xi_2^i)$  (resp.  $E_2^s(i_{\mathcal{I}}, \xi_1^i)$ ).

Comme dans les paragraphes précédents, pour construire les amplitudes du développement BKW, on aura besoin des projecteurs et des pseudos-inverses suivants :

**Définition 6.9.7** Pour  $k \in \mathfrak{R}_1$ , on pose  $P_{s,1}^k$  le projecteur sur  $E_1^{s,e}(i_{\mathcal{I}}, \xi_2^k)$  associé à la première somme directe de (6.2).

Pour  $k \in \mathfrak{R}_2$ , on pose  $P_{s,2}^k$  le projecteur sur  $E_2^{s,e}(i_{\mathcal{I}}, \xi_1^k)$  associé à la deuxième somme directe de (6.2).

Pour  $k \in \mathcal{I}_{os}$ , on pose  $P_1^k$  (resp.  $P_2^k$ ) le projecteur sur  $\ker \mathcal{L}(f_k)$  associé à la somme directe (6.3) (resp. (6.5)) et  $Q_1^k$  (resp.  $Q_2^k$ ) le projecteur sur  $A_1 \ker \mathcal{L}(f_k)$  (resp.  $A_2 \ker \mathcal{L}(f_k)$ ) associé à la somme directe (6.4) (resp. (6.6)).

On a alors l'égalité  $\text{Im} \mathcal{L}(f_k) = \ker Q_1^k = \ker Q_2^k$ . De plus, par hypothèse de stricte hyperbolicité, les projecteurs  $P_i^k$  et  $Q_i^k$  sont de rang 1.

Pour  $i = 1, 2$ , on définit de plus les pseudo-inverses  $R_i^k$  de  $\mathcal{L}(f_k)$ , par les relations :

$$R_i^k \mathcal{L}(f_k) = I - P_i^k, \quad P_i^k R_i^k = R_i^k Q_i^k = 0. \quad (6.110)$$

Enfin, dans un souci d'allègement des notations on pose

$$S_1^k := P_1^k \phi_1^k, \quad S_2^k := P_2^k \phi_2^k, \quad S_{s,1}^k := P_{s,i}^k \phi_1^k, \quad S_{s,2}^k := P_{s,2}^k \phi_2^k.$$

Enfin puisque l'on aura à résoudre des équations de transport, on introduit dès maintenant les variables :

$$\forall i \in \mathcal{I}_{es}, t_{es}^i(t, x_1) := t - \frac{1}{v_{i,1}}x_1, \quad x_{es}^i(x_1, x_2) := x_2 - \frac{v_{i,2}}{v_{i,1}}x_1, \quad (6.111)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}_{se}, t_{se}^i(t, x_2) := t - \frac{1}{v_{i,2}}x_2, \quad x_{se}^i(x_1, x_2) := x_1 - \frac{v_{i,1}}{v_{i,2}}x_2. \quad (6.112)$$

### 6.9.3 Construction du développement BKW.

Dans tout ce qui suit on va devoir considérer trois grands types de phases, les oscillantes, les évanescents pour la face  $\partial\Omega_1$  et enfin les évanescents pour la face  $\partial\Omega_2$ . On notera donc :

$$\begin{aligned} \varphi_k(t, x) &:= \langle (t, x), f_k \rangle, \quad f_k \in \mathcal{F}_{os}, \\ \psi_{k,1}(t, x_2) &:= \langle (t, 0, x_2), f_k \rangle, \quad f_k \in \mathcal{F}_{ev1}, \\ \psi_{k,2}(t, x_1) &:= \langle (t, x_1, 0), f_k \rangle, \quad f_k \in \mathcal{F}_{ev2}. \end{aligned}$$

De plus étant donné une amplitude  $g \in H_p^\infty$ , nulle sur les temps négatifs, on a choisi de travailler avec un terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  de la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_2) := e^{\frac{i}{\varepsilon}(\tau t + x_2 \xi_2^{n_1})} g(t, x_2),$$

c'est-à-dire un terme source qui "allume" un point de la boucle et a une vitesse de groupe entrante pour la face  $\partial\Omega_1$ . On s'attend donc à générer un paquet d'ondes se propageant en partie vers la face  $\partial\Omega_2$ .

On a choisi de traiter, comme au chapitre 2, les mode évanescents de façon "monobloc" c'est-à-dire que pour un indice  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{ev1}$  (resp.  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{ev2}$ ), tous les indices  $j \in \mathcal{I}_{ev1} \cap \Phi(\underline{i})$  (resp.  $j \in \mathcal{I}_{ev2} \cap \Psi(\underline{i})$ ) contribueront à la même amplitude.

On postule un ansatz de la forme :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x) &\sim \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi_k(t, x)} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{n,k}(t, x) \\ &+ \sum_{k \in \mathfrak{R}_1} e^{\frac{i}{\varepsilon}\psi_{k,1}(t, x_2)} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_{n,k,1}\left(t, x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) + \sum_{k \in \mathfrak{R}_2} e^{\frac{i}{\varepsilon}\psi_{k,2}(t, x_1)} \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_{n,k,2}\left(t, x, \frac{x_2}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (6.113)$$

Et l'on cherche à déterminer les profils  $u_{n,k}$ ,  $U_{n,k,1}$  et  $U_{n,k,2}$ . Comme dans les paragraphes précédents, on va chercher les profils oscillants  $u_{n,k}$  dans  $H^\infty(\Omega_T)$ . Tandis que l'on va chercher les profils évanescents  $U_{n,k,1}$  et  $U_{n,k,2}$  dans l'espace suivant (cf. chapitre 2) :

**Définition 6.9.8** *Pour  $i = 1, 2$ , on note  $P_{ev,i}$  l'ensemble des profils évanescents pour la face  $\partial\Omega_i$  qui est l'ensemble des fonctions  $U(t, x, X_i) \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$  pour lesquelles il existe  $\delta > 0$  tel que  $e^{\delta X_i} U(t, x, X_i) \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$ .*

Injectant l'ansatz (6.113) dans l'équation d'évolution du problème à coin (6.95), par identification des différentes puissances de  $\varepsilon$ , on est amené à résoudre la cascade d'équations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(d\varphi_k)u_{0,k} = 0, & \forall k \in \mathcal{I}_{os}, \\ i\mathcal{L}(d\varphi_k)u_{n+1,k} + L(\partial)u_{n,k} = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathcal{I}_{os}, \\ L_k(\partial_{X_1})U_{0,k,1} = 0, & \forall k \in \mathfrak{R}_1, \\ L_k(\partial_{X_1})U_{n+1,k,1} + L(\partial)U_{n,k,1} = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathfrak{R}_1, \\ L_k(\partial_{X_2})U_{0,k,2} = 0, & \forall k \in \mathfrak{R}_2, \\ L_k(\partial_{X_2})U_{n+1,k,2} + L(\partial)U_{n,k,2} = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathfrak{R}_2, \end{cases} \quad (6.114)$$

où les opérateurs de dérivation dans les variables rapides  $L_k(\partial_{X_1})$  et  $L_k(\partial_{X_2})$  sont définis par :

$$\begin{aligned} L_k(\partial_{X_1}) &:= A_1(\partial_{X_1} - \mathcal{A}_1(\mathcal{I}, \xi_2^k)), \text{ pour } k \in \mathfrak{R}_1, \\ L_k(\partial_{X_2}) &:= A_2(\partial_{X_2} - \mathcal{A}_2(\mathcal{I}, \xi_1^k)), \text{ pour } k \in \mathfrak{R}_2. \end{aligned}$$

Ensuite, injectant l'ansatz (6.113) dans les conditions de bord sur les faces  $\partial\Omega_1$  et  $\partial\Omega_2$  on obtient les équations :

$$\begin{aligned} B_1 \left[ \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{1,k}} u_{n,k}(t, 0, x_2) + \sum_{k \in \mathfrak{R}_1} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{1,k}} U_{n,k,1}(t, 0, x_2, 0) \right. \\ \left. + \sum_{k \in \mathfrak{R}_2} e^{\frac{i}{\varepsilon} \tau t} U_{n,k,2} \left( t, 0, x_2, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right] = \delta_{n,0} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{1,n_1}} g, \end{aligned} \quad (6.115)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} B_2 \left[ \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{2,k}} u_{n,k}(t, x_1, 0) + \sum_{k \in \mathfrak{R}_2} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{2,k}} U_{n,k,2}(t, x_1, 0, 0) \right. \\ \left. + \sum_{k \in \mathfrak{R}_1} e^{\frac{i}{\varepsilon} \tau t} U_{n,k,1} \left( t, x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Or, par choix des profils évanescents, les termes  $U_{n,k,2}(t, 0, x_2, \frac{x_2}{\varepsilon})$  et  $U_{n,k,1}(t, x_1, 0, \frac{x_1}{\varepsilon})$ , qui apparaissent dans (6.115) et (6.116) respectivement, sont des  $O(\varepsilon^\infty)$ . Ainsi, les conditions de bords (6.115) et (6.116) se réécrivent sous la forme :

$$B_1 \left[ \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{1,k}} u_{n,k}(t, 0, x_2) + \sum_{k \in \mathfrak{R}_1} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{1,k}} U_{n,k,1}(t, 0, x_2, 0) \right] = \delta_{n,0} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{1,n_1}} g(t, x_2), \quad (6.117)$$

et

$$B_2 \left[ \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{2,k}(t, x_1)} u_{n,k}(t, x_1, 0) + \sum_{k \in \mathfrak{R}_2} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{2,k}(t, x_1)} U_{n,k,2}(t, x_1, 0, 0) \right] = 0. \quad (6.118)$$

Utilisant l'indépendance linéaire des différentes phases, on peut décomposer les deux conditions de bords (6.117) et (6.118) sous la forme de la cascade suivante :

$$\begin{cases} B_1 \left[ \sum_{j \in \Phi(n_1) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{n,j} + U_{n,n_1,1|_{X_1=0}} \right]_{|_{x_1=0}} = \delta_{n,0} g, & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n_1 \in \mathfrak{R}_1, \\ B_1 \left[ \sum_{j \in \Phi(n_1)} u_{n,j} \right]_{|_{x_1=0}} = \delta_{n,0} g, & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n_1 \notin \mathfrak{R}_1, \\ B_1 \left[ \sum_{j \in \Phi(k) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{n,j} + U_{n,k,1|_{X_1=0}} \right]_{|_{x_1=0}} = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in (\mathcal{R}_1 \setminus \{n_1\}) \cap \mathfrak{R}_1, \\ B_1 \left[ \sum_{j \in \Phi(k)} u_{n,j} \right]_{|_{x_1=0}} = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \notin (\mathcal{R}_1 \setminus \{n_1\}) \cap \mathfrak{R}_1, \\ B_2 \left[ \sum_{j \in \Psi(k) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{n,j} + U_{n,k,2|_{X_2=0}} \right]_{|_{x_2=0}} = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathfrak{R}_2, \\ B_2 \left[ \sum_{j \in \Psi(k)} u_{n,j} \right]_{|_{x_2=0}} = 0, & \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathcal{R}_2 \setminus \mathfrak{R}_2, \end{cases} \quad (6.119)$$

Injectant l'ansatz (6.113) dans la condition initiale du problème à coin (6.95), on est amené à résoudre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n,k|t=0} = 0, & \forall k \in \mathcal{I}_{os}, \\ U_{n,k,1|t=0} = 0, & \forall k \in \mathfrak{R}_1, \\ U_{n,k,2|t=0} = 0, & \forall k \in \mathfrak{R}_2. \end{cases} \quad (6.120)$$

Le plan de la construction du développement BKW est le suivant. Dans un premier temps avant de résoudre à proprement parler la cascade BKW, on va exhiber une structure globale traduisant les relations que les éléments de  $\mathcal{I}$  entretiennent avec les indices de la boucle. Plus précisément, il s'agira de trouver une partition de  $\mathcal{I}$  sous forme "d'arbres", ou d'ensembles "ordonnés" par les relations  $\xrightarrow{H}$  et  $\xrightarrow{V}$  (voir définition 6.9.4), dont les points de base (ou racines) sont les voisins directs des indices de la boucle. Puis, on va déterminer les amplitudes liées aux indices de la boucle. Pour ce faire, on aura besoin d'imposer une certaine condition d'inversibilité qui sera étudiée plus en profondeur à la fin de la démonstration dans le sous-paragraphe 6.9.5.

La connaissance des amplitudes associées aux indices de la boucle permettra ensuite de construire les amplitudes liées à des indices qui sont des voisins directs des indices de la boucle et donc des points de base dans la structure arborée de  $\mathcal{I}$ . En d'autres termes, la condition d'inversibilité sera utilisée de manière à pouvoir initialiser la construction du développement BKW.

Ensuite, pour construire les amplitudes restantes dans le développement BKW, il suffira d'étudier localement chacun des "arbres" dans lesquels la résolution sera aisée puisque comme on le verra au sous-paragraphe 6.9.3, ces ensembles disposent d'un ordre (qui n'est que partiel mais cela suffira).

On reprendra le même schéma et plus particulièrement le même ordre de démonstration pour déterminer les termes d'ordre supérieur (*i.e.*  $n \geq 1$ ) dans le développement BKW.

### Structure globale de l'ensemble des indices $\mathcal{I}$ .

Le but de ce sous-paragraphe est de construire une partition de l'ensemble  $\mathcal{I}$ . On veut que cette partition ne soit plus basée sur les différents types des éléments de  $\mathcal{I}$ , mais plutôt sur les relations de voisinage qu'entretiennent les éléments de  $\mathcal{I}$  avec les points de la boucle d'autointeraction. Plus précisément, on a décidé de la baser sur les différents types de suite pouvant relier un indice  $i$  à l'un des points de la boucle d'autointeraction. En l'occurrence on choisira de travailler avec l'indice  $n_1$ .

La construction de la partition est la suivante ; d'après la proposition 6.9.2, on sait que tout indice  $i$  dans  $\mathcal{I}$  est relié par une suite de type  $V$  à l'un des indices de  $\mathcal{I}_0$  (cf. définition 6.9.4). Sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout indice  $i$  la suite reliant  $i$  à l'indice de  $\mathcal{I}_0$  ne commence pas par la séquence  $(n_4, n_2, n_3, n_1)$ .

Le lemme suivant est immédiat :

**Lemme 6.9.1** *Pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , il existe au moins une suite de type  $V$  qui relie  $i$  à  $n_1$ . De façon équivalente, pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,*

$$n_1 \xrightarrow{V} i,$$

*où l'on rappelle que la notation  $\xrightarrow{V}$  a été introduite dans la définition 6.9.4.*

**Démonstration :** Il suffit de traiter le cas des indices  $i$  reliés à  $i_0$  pour  $i_0 \in \mathcal{I}_0 \setminus \{n_1\}$ . C'est-à-dire pour lesquels il existe une suite, notée  $\tilde{\ell}$ , de type  $V$  reliant  $i$  à  $i_0$ . Or, par définition,  $i_0 \in \Phi(n_1)$ . Donc  $i$  est relié à  $n_1$  par la suite de type  $V$  définie par  $\ell = (n_4, n_3, n_2, \tilde{\ell})$ .

□

Soit  $i \in \mathcal{I} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ , on considère  $\ell^i = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$  une suite de type  $V$  reliant  $i$  à  $n_1$ . On construit les ensembles de la partition notés  $A_{a_l}, B_{b_m}, C_{c_q}, D_{d_r}$  de la façon suivante :

On commence par poser  $\mathbb{C}_1 := \#\Psi(n_1) - 2$ , et :

$$\Psi(n_1) \setminus \{n_4\} := \{a_1, a_2, \dots, a_{\mathbb{C}_1}\}.$$

Soit  $l \in \{1, \dots, \mathbb{C}_1\}$ , on dit alors que  $i \in A_{a_l}$  si et seulement si la suite  $\ell^i$  vérifie  $\ell_1 = a_l$ .

A ce stade on a donc traité toutes les suites  $\ell^i$  ne commençant pas par  $n_4$ . On traite ensuite le cas où la suite  $\ell^i$  commence par  $n_4$ . Pour cela on pose  $\mathbb{C}_4 := \#\Phi(n_4) - 2$ , et

$$\Phi(n_4) \setminus \{n_3\} := \{b_1, b_2, \dots, b_{\mathbb{C}_4}\}.$$

Alors, soit  $m \in \{1, \dots, \mathbb{C}_2\}$ , on dit que  $i \in B_{b_m}$  si et seulement si la suite  $\ell^i$  vérifie  $\ell_1 = n_4$  et  $\ell_2 = b_m$ . On a donc traité toutes les suites  $\ell^i$  dont les deux premiers termes ne sont pas  $n_4$  puis  $n_3$ .

Enfin on pose  $\mathbb{C}_3 := \#\Psi(n_3) - 2$ ,  $\mathbb{C}_2 := \#\Phi(n_2) - 2$  ainsi que :

$$\Psi(n_3) \setminus \{n_2\} := \{c_1, c_2, \dots, c_{\mathbb{C}_3}\}, \quad \Phi(n_2) \setminus \{n_1\} := \{d_1, d_2, \dots, d_{\mathbb{C}_2}\},$$

et on définit les ensembles  $C_{c_q}$  et  $D_{d_r}$  de la façon suivante :

◇ Soit  $q \in \{1, \dots, \mathbb{C}_3\}$ ,  $i \in C_{c_q}$  si et seulement si la suite  $\ell^i$  vérifie  $\ell_1 = n_4$ ,  $\ell_2 = n_3$  et  $\ell_3 = c_q$ .

◇ Soit  $r \in \{1, \dots, \mathbb{C}_2\}$ ,  $i \in D_{d_r}$  si et seulement si la suite  $\ell^i$  vérifie  $\ell_1 = n_4$ ,  $\ell_2 = n_3$ ,  $\ell_3 = n_2$  et  $\ell_4 = d_r$ .

Cet algorithme permet donc de traiter toutes les suites possibles car on a exclu de l'étude les suites commençant par la sous-séquence  $(n_4, n_3, n_2, n_1)$ .

Il est alors clair que

$$(\mathcal{I} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4\}) = (\cup_{l \leq \mathbb{C}_1} A_{a_l}) \cup (\cup_{m \leq \mathbb{C}_2} B_{b_m}) \cup (\cup_{q \leq \mathbb{C}_3} C_{c_q}) \cup (\cup_{r \leq \mathbb{C}_4} D_{d_r}).$$

On peut au passage donner la caractérisation suivante des ensembles  $A_{a_l}$  et  $B_{b_m}$  :  $A_{a_l}$  est l'ensemble des indices  $i \in \mathcal{I}$  tels que  $a_l \xrightarrow{H} i$ , tandis que  $B_{b_m}$  est l'ensemble des indices  $i \in \mathcal{I}$  tels que  $b_m \xrightarrow{V} i$ . Une caractérisation analogue est valable pour les ensembles  $C_{c_q}$  et  $D_{d_r}$ . En terme de réflexion de paquets d'ondes, un ensemble  $A_{a_l}$  constitue l'ensemble des indices associés à des phases qui ont été obtenues par rebond de la phase associée à l'indice  $a_l$ , cette dernière étant une phase qui a été obtenue par rebond sur la face  $\partial\Omega_2$  de la phase associée à l'indice  $n_1$ . De même, l'ensemble  $B_{b_m}$  constitue l'ensemble des phases qui ont été obtenues par réflexion de la phase associée à l'indice  $b_m$ . La phase associée à l'indice  $b_m$  a été obtenue par réflexion de la phase liée à l'indice  $n_4$  sur la face  $\partial\Omega_1$ .

Toutefois puisque pour  $i$  fixé, l'algorithme précédent dépend du choix de la suite<sup>6</sup>  $\ell^i$  reliant  $i$  à  $n_1$ , il n'est pas clair, du moins en premier lieu, que les ensembles  $A_{a_l}, B_{b_m}, C_{c_q}$  et  $D_{d_r}$  que l'on vient de construire soient indépendants du choix de la suite. En effet, a priori, il se pourrait par exemple qu'un indice  $j$  soit relié à  $n_1$  par une suite ne commençant pas par  $n_4$  et par une suite qui commence par  $n_4$  et dont le second terme est différent de  $n_3$ . Ainsi, a priori, l'indice  $j$  considéré serait, lorsque l'on utilise la première suite, dans un arbre de la forme  $A_{a_l}$  et, lorsque l'on utilise la deuxième suite, dans un arbre de la forme  $B_{b_m}$ . Cependant, l'hypothèse d'unicité de la boucle empêche ce cas de figure comme le montre le lemme suivant :

<sup>6</sup>Le lecteur peut s'étonner du fait que l'on ne tente pas ici de démontrer l'unicité de la suite reliant  $i$  à  $n_1$ , ce qui éviterait cette discussion. De plus, comme on le verra au sous-paragraphe 6.9.3, cette unicité est effective. Le fait que l'on ne démontre pas cette unicité ici constitue donc juste un choix rédactionnel. En effet, on a trouvé plus facile de suivre la démonstration si on commence dans un premier temps par exhiber une structure globale arborée de l'ensemble des fréquences, puis dans un second temps, d'étudier localement chacun des arbres de cette structure.

**Lemme 6.9.2** *La décomposition*

$$(\mathcal{I} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4\}) = (\cup_{l \leq \mathbb{C}_1} A_{a_l}) \cup (\cup_{m \leq \mathbb{C}_2} B_{b_m}) \cup (\cup_{q \leq \mathbb{C}_3} C_{c_q}) \cup (\cup_{r \leq \mathbb{C}_4} D_{d_r}),$$

forme une partition de  $\mathcal{I} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ , i.e. soit  $E$  et  $F$  deux ensembles distincts du membre de droite, on a

$$E \cap F = \emptyset.$$

**Démonstration :** On définit la suite "miroir" d'une suite de la façon suivante :

$$\forall \ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \in \mathcal{I}^p, \quad \bar{\ell} := (\ell_p, \ell_{p-1}, \dots, \ell_1) \in \mathcal{I}^p.$$

Soit  $l, l' \in \{1, \dots, \mathbb{C}_1\}$ ,  $l \neq l'$ .

◇ Démonstration de  $A_{a_l} \cap A_{a_{l'}} = \emptyset$  :

Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $i \in A_{a_l} \cap A_{a_{l'}}$ . Ainsi, il existe une suite  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  de type  $H$  qui relie  $i$  à  $a_l$  et une suite  $\ell' = (\ell'_1, \dots, \ell'_{p'})$  de type  $H$  qui relie  $i$  à  $a_{l'}$ . On distingue les cas suivants selon la parité des entiers  $p$  et  $p'$ .

•  $p, p' \in 2\mathbb{N}$ .

Par définition des suites de type  $H$  on a  $i \in \Phi(\ell_p)$  et  $i \in \Phi(\ell'_{p'})$ . Par conséquent d'après la propriété ii) de la proposition 6.9.1,  $\ell'_{p'} \in \Phi(\ell_p)$ . Donc la suite  $(\ell, \bar{\ell}')$  est une suite de type  $H$  reliant  $a_l$  à  $a_{l'}$ . Par définition  $a_l \in \Psi(a_{l'})$ , car  $\Psi(a_{l'}) = \Psi(a_{l'}) = \Psi(n_1)$ . La suite  $(\ell, \bar{\ell}', a_{l'})$  est une boucle pour  $a_l$  contenant  $p + p' + 1$  éléments ce qui est exclu par l'hypothèse 6.9.2 sauf si  $p = 2$  et  $p' = 0$ , ou  $p = 0$  et  $p' = 2$ . Dans les deux cas, on a alors  $a_l = n_1$  ou  $a_{l'} = n_1$ , ce qui est absurde par construction de  $a_l$  et de  $a_{l'}$ .

•  $p \in 2\mathbb{N}, p' \in 2\mathbb{N} + 1$ .

On a maintenant  $i \in \Phi(\ell_p)$  et  $i \in \Psi(\ell'_{p'})$  ou de façon équivalente  $\ell'_{p'} \in \Psi(i)$ . Donc la suite  $(\ell, i, \bar{\ell}')$  est une suite de type  $H$  reliant  $a_l$  à  $a_{l'}$ . Ce qui implique que la suite  $(\ell, i, \bar{\ell}', a_{l'})$  est une boucle pour  $a_l$  contenant  $p + p' + 2$  éléments. Ceci est exclu par l'hypothèse 6.9.2 sauf si  $p = 0$  et  $p' = 1$ , ou  $p = 1$  et  $p' = 0$ . Dans les deux cas, on a alors  $a_l = n_1$  ou  $a_{l'} = n_1$  ce qui est absurde.

Le cas  $p, p' \in 2\mathbb{N} + 1$  est assez similaire au cas  $p, p' \in 2\mathbb{N}$  c'est pourquoi on se permet ici d'en omettre la démonstration.

On traite maintenant la démonstration de  $A_{a_l} \cap B_{b_m} = \emptyset$ , les démonstrations montrant que les autres intersections sont vides étant analogues, ces dernières ne seront pas traitées ici.

◇ Démonstration de  $A_{a_l} \cap B_{b_m} = \emptyset$  :

Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $i \in A_{a_l} \cap B_{b_m}$ . Ainsi, comme  $a_l \xrightarrow{H} i$  et  $b_m \xrightarrow{V} i$ , il existe une suite  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  de type  $H$  qui relie  $i$  à  $a_l$  et une suite  $\ell' = (\ell'_1, \dots, \ell'_{p'})$  de type  $V$  qui relie  $i$  à  $b_m$ . On distingue une fois de plus les cas suivants selon la parité des entiers  $p$  et  $p'$ .

•  $p, p' \in 2\mathbb{N}$ .

On a donc  $i \in \Phi(\ell_p)$  et  $i \in \Psi(\ell'_{p'})$ . On montre donc comme dans le cas  $p \in 2\mathbb{N}, p' \in 2\mathbb{N} + 1$  de la démonstration de l'assertion  $A_{a_l} \cap A_{a_{l'}} = \emptyset$  que la suite  $(\ell, i, \bar{\ell}')$  relie  $a_l$  à  $b_m$ . Par conséquent puisque  $a_l \in \Phi(n_4)$  et  $n_4 \in \Phi(b_m)$ , la suite  $(\ell, i, \bar{\ell}', b_m, n_4)$  est une boucle pour  $a_l$  contenant un nombre impair d'éléments.

•  $p \in 2\mathbb{N}, p' \in 2\mathbb{N} + 1$ .

On montre donc comme dans le cas  $p, p' \in 2\mathbb{N}$  de la démonstration de l'assertion  $A_{a_l} \cap A_{a_{l'}} = \emptyset$  que la suite  $(\ell, \bar{\ell}')$  relie  $a_l$  à  $b_m$ . Donc la suite  $(\ell, \bar{\ell}', b_m, n_4)$  est une boucle pour  $a_l$  contenant un nombre impair d'éléments.

□

Ainsi, pour déterminer l'intégralité des amplitudes dans le développement BKW, puisque

$$(\cup_{l \leq \mathbb{C}_1} A_{a_l}) \cup (\cup_{m \leq \mathbb{C}_2} B_{b_m}) \cup (\cup_{q \leq \mathbb{C}_3} C_{c_q}) \cup (\cup_{r \leq \mathbb{C}_4} D_{d_r}), \quad (6.121)$$

constitue une partition de  $\mathcal{I} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ , il sera suffisant de déterminer d'une part les amplitudes liées aux indices de la boucle et d'autre part toutes les amplitudes dans chacun des ensembles de la partition (6.121).

De plus, la détermination des amplitudes dans l'un des ensembles de la partition pourra se faire intrinsèquement dans cet ensemble. En effet, le fait que l'on ait une partition implique qu'un indice  $i$  fixé dans l'un des ensembles de la partition (6.121) n'est relié via les conditions au bord (6.119) qu'à des indices dans le même ensemble de partition.

Enfin, la minimalité de l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$  et les mêmes arguments que ceux développés pour démontrer le caractère de partition de (6.121) ont pour conséquence le raffinement de la proposition 6.9.1 suivant :

**Proposition 6.9.3** *Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de fréquences complet pour les réflexions. On suppose que  $\mathcal{F}$  vérifie l'hypothèse 6.9.2. Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des indices associés à  $\mathcal{F}$  ; alors les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifient en plus des propriétés de la proposition 6.9.1, les deux propriétés suivantes :*

*viii) On a les inclusions suivantes :*

$$\begin{aligned} \Phi(n_1) \setminus \{n_2\} &\subset \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1} \quad , \quad \Psi(n_2) \setminus \{n_3\} \subset \mathcal{I}_{se} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev2}, \\ \Phi(n_3) \setminus \{n_4\} &\subset \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1} \quad , \quad \Psi(n_4) \setminus \{n_1\} \subset \mathcal{I}_{se} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev2}. \end{aligned}$$

*ix) Soit  $i \in \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1}$  et  $j \in \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev2}$  on a les implications suivantes,*

$$\begin{aligned} i \in \Phi(n_1) &\implies \Psi(i) = \{i\} \quad , \quad j \in \Psi(n_1) \implies \Phi(j) = \{j\}, \\ i \in \Phi(n_4) &\implies \Psi(i) = \{i\} \quad , \quad j \in \Psi(n_3) \implies \Phi(j) = \{j\}. \end{aligned}$$

On illustre ces propriétés sur le schéma de la figure 6.16.

**Démonstration :**  $\diamond$  Démonstration de *viii)* :

On montre seulement la première assertion, à savoir :  $\Phi(n_1) \setminus \{n_2\} \subset \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1}$ . Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $i \in \Phi(n_1) \cap \mathcal{I}_{se}$ ,  $i \neq n_2$ . Alors, il existe  $j \in \Psi(i) \cap \mathcal{I}_{es}$ . Faute de quoi, l'ensemble des fréquence indexé par  $\mathcal{I} \setminus \{i\}$  est strictement inclu dans  $\mathcal{F}$ , ce qui est exclu par hypothèse de minimalité sur  $\mathcal{F}$ .

Or, d'après le lemme 6.9.1, on sait qu'il existe une suite de type  $V$ ,  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$  avec  $p \in 2\mathbb{N} + 1$  (car  $n_1, j \in \mathcal{I}_{es}$ , voir définition 6.9.4) telle que  $n_1 \xrightarrow{V} j$ . Donc, la suite  $(\ell, j, i)$  est une boucle d'autointeraction pour  $n_1$ , de taille impaire, différente de la boucle d'autointeraction  $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$  ce qui est exclu par l'hypothèse 6.9.2.

$\diamond$  Démonstration de *ix)* :

La démonstration du point *ix)* suit exactement le même raisonnement que celui décrit pour le point *viii)*. A ceci près que la boucle construite n'est pas une boucle d'autointeraction (car elle ne contient pas que des éléments de  $\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{se}$ ).

□

L'assertion  $\Phi(n_1) \setminus \{n_2\} \subset \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1}$  du point *viii)* de la proposition 6.9.3 veut dire que bien que la variété caractéristique contienne une boucle, on écarte initialement les fréquences associées à des indices sortants-entrants **à l'exception de  $n_2$  et de  $n_2$  seulement**. Ceci a déjà été indiqué dans le processus de génération des phases du paragraphe 6.8. Le point *ix)* affirme qu'en raison de l'hypothèse d'unicité de la boucle, une phase entrante-entrante voisine de la boucle ne peut être



générée que par un rebond sur l'une des faces du domaine.

La proposition 6.9.3 permet de réécrire la partition (6.121) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{I} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4\}) &= (\cup_{a_l \in \Psi(n_1) \cap \mathcal{I}_{es}} A_{a_l} \cup_{a_l \in \Psi(n_1) \cap (\mathcal{I}_{ev1} \cup \mathcal{I}_{ee})} \{a_l\}) \\
 &\cup (\cup_{b_m \in \Phi(n_4) \cap \mathcal{I}_{se}} B_{b_m} \cup_{b_m \in \Phi(n_4) \cap (\mathcal{I}_{ev2} \cup \mathcal{I}_{ee})} \{b_m\}) \\
 &\cup (\cup_{c_q \in \Psi(n_3) \cap \mathcal{I}_{es}} C_{c_q} \cup_{c_q \in \Psi(n_3) \cap (\mathcal{I}_{ev1} \cup \mathcal{I}_{ee})} \{c_q\}) \\
 &\cup (\cup_{d_r \in \Phi(n_2) \cap \mathcal{I}_{es}} D_{d_r} \cup_{d_r \in \Phi(n_2) \cap (\mathcal{I}_{ev2} \cup \mathcal{I}_{ee})} \{d_r\}).
 \end{aligned} \tag{6.122}$$

On décrit au passage la partition (6.122) pour l'exemple du sous-paragraphe 6.9.1. On a  $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_3 = 0$ ,  $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_4 = 1$ ,  $b = 5$ ,  $B_b = \{6, 7, \dots, 10\}$ ,  $d = 0$  et  $D_d = \{-1\}$ .

On conclut ce sous-paragraphe par la figure 6.16 qui résume la structure "arborée globale" de l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$  :

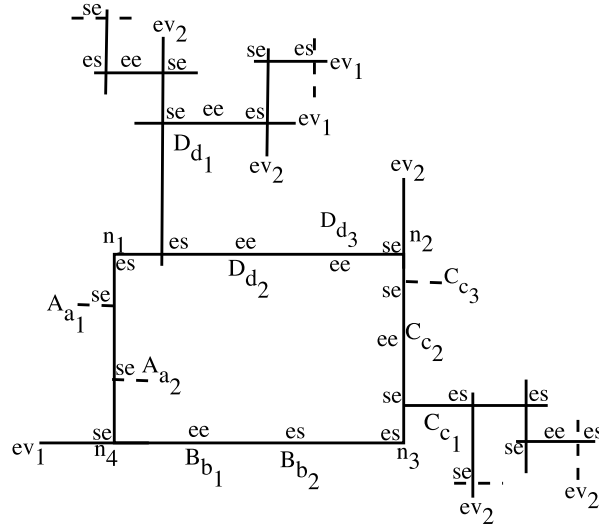


Figure 6.16: Structure "arborée" de l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$ .

### Détermination des amplitudes sur la boucle et condition d'inversibilité.

Maintenant que l'on a décrit une structure sur l'ensemble des fréquences, et que l'on a légèrement affiné les propriétés des applications  $\Phi$  et  $\Psi$ , il est temps de commencer la détermination des amplitudes dans le développement BKW. Un bon choix pour initialiser cette construction est de déterminer en premier les amplitudes liées aux indices de la boucle. Pour ce faire, on a besoin d'une nouvelle équation d'amplitude, dont on décrit la provenance dans ce sous-paragraphe (voir aussi le sous-paragraphe 6.9.1).

Par convention,  $n_1 \in \mathcal{I}_{es}$  donc l'amplitude  $u_{0,n_1}$  vérifie l'équation de transport :

$$\begin{cases}
 (\partial_t + v_{n_1} \cdot \nabla_x) Q_1^{n_1} u_{0,n_1} = 0, \\
 B_1 \left[ \sum_{k \in \Phi(n_1)} u_{0,k} \right]_{|x_1=0} = g, \quad \text{si } n_1 \notin \mathfrak{N}_1, \\
 u_{0,n_1}|_{t \leq 0} = 0,
 \end{cases} \tag{6.123}$$

et,

$$\begin{cases} (\partial_t + v_{n_1} \cdot \nabla_x) Q_1^{n_1} u_{0,n_1} = 0, \\ B_1 \left[ \sum_{k \in \Phi(n_1)} u_{0,k} + U_{0,n_1,1|_{X_1=0}} \right]_{|_{X_1=0}} = g, \quad \text{si } n_1 \in \mathfrak{R}_1. \\ u_{0,n_1}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.124)$$

Dans les deux cas, en utilisant le fait que  $\Phi(n_1) \cap \mathcal{I}_{se} = \{n_2\}$  d'après le point *vi*) de l'hypothèse 6.9.2 et le point *viii*) de la proposition 6.9.3, on peut expliciter la condition de bord de (6.123) sous la forme suivante :

$$u_{0,n_1|_{x_1=0}} + \sum_{k \in (\Phi(n_1) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee})) \setminus \{n_1\}} u_{0,k|_{x_1=0}} = \phi_1^{n_1} \left[ g - B_1 u_{0,n_2|_{x_1=0}} \right],$$

dans le cas où  $n_1 \notin \mathfrak{R}_1$ , et

$$u_{0,n_1|_{x_1=0}} + \sum_{k \in (\Phi(n_1) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee})) \setminus \{n_1\}} u_{0,k|_{x_1=0}} + U_{0,n_1,1|_{x_1=X_1=0}} = \phi_1^{n_1} \left[ g - B_1 u_{0,n_2|_{x_1=0}} \right],$$

si  $n_1 \in \mathfrak{R}_1$ . Composant ces conditions par le projecteur  $P_1^{n_1}$  et utilisant la polarisation des  $u_{0,k}$  sur les sous-espaces  $\ker \mathcal{L}(d\varphi_k)$ , on obtient, dans les deux cas possibles, que la trace de  $u_{0,n_1}$  sur  $\partial\Omega_1$  est donnée par :

$$u_{0,n_1|_{x_1=0}} = S_1^{n_1} \left[ g - B_1 u_{0,n_2|_{x_1=0}} \right],$$

où l'on rappelle que la matrice  $S_1^{n_1}$  est définie à la définition 6.9.7.

Il est maintenant aisé d'intégrer l'équation d'évolution de (6.123) le long des caractéristiques pour obtenir l'expression de  $u_{0,n_1}$  en fonction de sa trace sur  $\partial\Omega_1$  ; il vient :

$$u_{0,n_1}(t, x) = S_1^{n_1} \left[ g - B_1 u_{0,n_2|_{x_1=0}} \right] (t_{es}^{n_1}(t, x_1), x_{es}^{n_1}(x_1, x_2)),$$

où les variables  $t_{es}^{n_1}$  et  $x_{es}^{n_1}$  sont définies en (6.111). Ceci détermine du même coup la trace de  $u_{0,n_1}$  sur  $\partial\Omega_2$  :

$$u_{0,n_1}(t, x_1, 0) = S_1^{n_1} \left[ g - B_1 u_{0,n_2|_{x_1=0}} \right] \left( t_{es}^{n_1}(t, x_1), -\frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}} x_1 \right). \quad (6.125)$$

On peut réitérer exactement le même raisonnement pour le second élément de la boucle. En effet, en utilisant le fait que  $n_2 \in \mathcal{I}_{se}$ ,  $u_{0,n_2}$  sera déterminée en intégrant le long des caractéristiques sa trace sur  $\partial\Omega_2$ . D'après l'hypothèse 6.9.2 et le point *viii*) de la proposition 6.9.3, la trace  $u_{0,n_2|_{x_2=0}}$  dépendra **seulement** de  $u_{0,n_3|_{x_2=0}}$  car  $n_3$  est l'unique indice dans  $\mathcal{I}_{es} \cap \Psi(n_2)$ . La trace  $u_{0,n_2|_{x_1=0}}$ , qui apparait dans l'équation (6.125), est ainsi donnée par (6.119), qui se simplifie en :

$$u_{0,n_2}(t, 0, x_2) = -S_2^{n_2} B_2 u_{0,n_3|_{x_2=0}} \left( t_{se}^{n_2}(t, x_2), -\frac{v_{n_2,1}}{v_{n_2,2}} x_2 \right). \quad (6.126)$$

Enfin, on réitère la même méthode pour obtenir les deux dernières traces des amplitudes liées à la boucle :

$$u_{0,n_3}(t, x_1, 0) = -S_1^{n_3} B_1 u_{0,n_4|_{x_1=0}} \left( t_{es}^{n_3}(t, x_1), -\frac{v_{n_3,2}}{v_{n_3,1}} x_1 \right). \quad (6.127)$$

et

$$u_{0,n_4}(t, 0, x_2) = -S_2^{n_4} B_2 u_{0,n_1|_{x_2=0}} \left( t_{se}^{n_4}(t, x_2), -\frac{v_{n_4,1}}{v_{n_4,2}} x_2 \right). \quad (6.128)$$

Le point crucial est qu'à chaque étape de ce calcul, il n'y a qu'une seule phase sortante avec les phases entrantes dans les classes d'équivalence des éléments de la boucle  $n_j$  pour les relations  $\sim_\Phi$  et

$\sim_\Psi$ . Ceci ne serait a priori plus vrai sans l'hypothèse d'unicité de la boucle d'autointeraction.

Ainsi, combinant les équations (6.125)-(6.126)-(6.127)-(6.128) on obtient, après quelques calculs, l'équation fonctionnelle déterminant la trace  $u_{0,n_1}|_{x_2=0}$  :

$$(I - \mathbb{T})u_{0,n_1}|_{x_2=0} = S_1^{n_1} g \left( t - \frac{1}{v_{n_1,1}} x_1, -\frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}} x_1 \right), \quad (6.129)$$

où  $\mathbb{T}$  est l'opérateur défini par :

$$(\mathbb{T}w)(t, x_1) := Sw(t + \alpha x_1, \beta x_1), \quad (6.130)$$

avec :

$$\begin{aligned} S &:= S_1^{n_1} B_1 S_2^{n_2} B_2 S_1^{n_3} B_1 S_2^{n_4} B_2, \\ \alpha &:= \frac{1}{v_{n_1,1}} \left[ -1 + \frac{v_{n_1,2}}{v_{n_2,2}} - \frac{v_{n_1,2} v_{n_2,1}}{v_{n_2,2} v_{n_3,1}} + \frac{v_{n_1,2} v_{n_2,1} v_{n_3,2}}{v_{n_2,2} v_{n_3,1} v_{n_4,2}} \right] < 0, \\ \beta &:= \frac{v_{n_4,1}}{v_{n_4,2}} \frac{v_{n_3,2}}{v_{n_3,1}} \frac{v_{n_2,1}}{v_{n_2,2}} \frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}} > 0. \end{aligned} \quad (6.131)$$

**Remarque** S'il y a plus de quatre indices dans la boucle d'autointeraction, alors le même raisonnement se généralise. Il faut seulement l'appliquer autant de fois qu'il y a de points sur la boucle. De la même manière si le premier terme sur la boucle est une fréquence sortante-entrante et non plus entrante-sortante, le même raisonnement se généralise à modification du terme de transport temporel près.

Au vu de l'équation fonctionnelle (6.129) on fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 6.9.3** *Pour tout  $\gamma > 0$ , l'opérateur  $(I - \mathbb{T})$  défini en (6.130) est uniformément inversible de  $L_\gamma^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  dans  $L_\gamma^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ .*

Cependant, pour  $T > 0$  et un terme source dans  $L^2(\partial\Omega_2, T)$  nul pour les temps négatifs, cette hypothèse ne fournira que des amplitudes sur la boucle de régularité  $L^2(\Omega_T)$ , ce qui n'est ni suffisant pour calculer les termes d'ordres supérieurs du développement BKW, ni pour assurer que les éventuelles amplitudes associées à des vitesses de groupe entrantes-entrantes soient  $H^1(\Omega_T)$  (on renvoie au paragraphe 6.4 traitant de l'équation des ondes pour plus de détails). On doit donc renforcer l'hypothèse 6.9.3 de la façon suivante :

**Hypothèse 6.9.4** *Soit  $T > 0$ , soit  $2 \leq K \leq \infty$ , l'opérateur  $(I - \mathbb{T})$  défini en (6.130) est uniformément inversible de  $H_p^K$  dans  $H_p^K$ .*

On insiste ici sur le fait que l'hypothèse 6.9.4 n'est pas une hypothèse purement formelle que l'on introduit juste pour construire le développement BKW. Toutefois, on montrera au sous-paragraphe 6.9.5 la proposition suivante :

**Proposition 6.9.4** *Sous l'hypothèse  $|S| < \sqrt{\beta}$  ( $S$  et  $\beta$  étant définis en (6.131)), pour tout  $\gamma > 0$ , l'opérateur  $(I - \mathbb{T})$  est uniformément inversible de  $L_\gamma^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  dans  $L_\gamma^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ . En particulier, pour tout  $T > 0$ , l'équation (6.129) admet une unique solution  $u \in L^2([-\infty, T] \times \mathbb{R}_+)$  si le terme source  $G$  est dans  $L^2(\partial\Omega_{1,T})$  et est nul sur les temps négatifs.*

*Pour  $T > 0$ , si  $\beta \leq 1$  et  $G \in H_p^\infty$ , sous l'hypothèse  $|S| < \sqrt{\beta}$ , la solution  $u$  de l'équation  $(I - \mathbb{T})u = G$  est dans  $H_p^\infty$ .*

*Pour  $T > 0$ , soit  $K \in \mathbb{N}$ , si  $\beta > 1$  et  $G \in H_p^K$ , sous l'hypothèse  $|S|\beta^{K-\frac{1}{2}} < 1$  alors la solution  $u$  de l'équation  $(I - \mathbb{T})u = G$  est dans  $H_p^K$ .*

Ainsi on a une hypothèse sous laquelle on peut assurer une régularité suffisante aux amplitudes de la boucle de manière à pouvoir, d'une part, construire les termes d'ordres supérieurs du développement BKW (au moins jusqu'à un ordre fini) et, d'autre part, gérer les amplitudes entrantes-entrantes. On renvoie au sous-paragraphe 6.9.5 pour plus de commentaires sur l'hypothèse  $|S| < \sqrt{\beta}$ .

Dans toute la suite de cette démonstration, on note  $K \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  le plus grand entier tel que la solution  $u$  de l'équation  $(I - \mathbb{T})u = G$  soit dans  $H_p^K$ , pour  $G \in H_p^K$ . Pour construire le premier terme correcteur, on supposera que  $K \geq 2$ .

Par conséquent, la trace  $u_{0,n_1}|_{x_2=0}$  est déterminée de façon unique dans  $H_p^K$  par

$$u_{0,n_1}(t, x_1, 0) = (I - \mathbb{T})^{-1} S_1^{n_1} g \left( t - \frac{1}{v_{n_1,1}} x_1, -\frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}} x_1 \right), \quad (6.132)$$

équation qui permet de déterminer les amplitudes  $u_{0,n_j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . En effet, par exemple, pour déterminer  $u_{0,n_4}$ , puisque  $n_4 \in \mathcal{I}_{se}$  il suffit de connaître sa trace sur  $\partial\Omega_2$  et d'intégrer le long des caractéristiques. Or grâce à l'équation (6.132), cette trace est donnée par (6.128) qui se réécrit:

$$\begin{aligned} u_{0,n_4}(t, 0, x_2) &= -S_2^{n_4} B_2 (I - \mathbb{T})^{-1} S_1^{n_1} g \left( t - \frac{1}{v_{n_1,1}} x_1, -\frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}} x_1 \right), \\ &:= \tilde{u}(t, x_2), \end{aligned}$$

dont on déduit l'expression :

$$u_{0,n_4}(t, x) = \tilde{u} \left( t - \frac{1}{v_{n_4,2}} x_1 - \frac{v_{n_4,1}}{v_{n_4,2}} x_2 \right). \quad (6.133)$$

Les amplitudes  $u_{0,n_1}$ ,  $u_{0,n_2}$  et  $u_{0,n_3}$  sont données par des formules analogues.

On a donc démontré la proposition suivante :

**Proposition 6.9.5** *Sous les hypothèses 6.9.1-6.2.2-6.2.3 sur le problème à coin (6.95), si l'ensemble de fréquences complet pour les réflexions  $\mathcal{F}$  vérifie l'hypothèse 6.9.2 et enfin sous l'hypothèse 6.9.4 sur l'opérateur  $\mathbb{T}$ , pour  $j = 1, \dots, 4$  et  $T > 0$ , il existe des fonctions  $u_{0,n_j} \in H^K(\Omega_T)$ , à traces dans  $H_p^K$ , vérifiant les cascades d'équations (6.114)-(6.119) et (6.120) écrites pour  $n = 0$  et  $k = n_j$ .*

### Détermination des amplitudes dans le voisinage direct de la boucle.

Dans ce sous-paragraphe, on montre que la connaissance des amplitudes de la boucle ainsi que la structure globale de l'ensemble des indices  $\mathcal{I}$  décrite dans le paragraphe 6.9.3 sont suffisantes pour construire les amplitudes dans le voisinage direct des indices de la boucle.

On a choisi de séparer cette construction de celle des amplitudes dans les arbres de la partition (6.122). Ce choix est justifié par les deux raisons suivantes. D'une part, on a trouvé important de faire explicitement les calculs au moins une fois (surtout pour les phases évanescents dont on n'a pas jusqu'ici décrit la construction). D'autre part, car la construction des amplitudes dans le voisinage direct de la boucle reste inchangée, à l'inverse du cas des amplitudes dans les arbres, sous une version plus faible de l'hypothèse d'unicité de la boucle (*i.e.* une hypothèse imposant l'unicité de la boucle d'autointeraction, mais n'excluant pas comme l'hypothèse 6.9.2 les autres types de boucle).

On décrit donc ici la construction des amplitudes dans  $\Phi(n_4)$  ce qui correspond dans la figure 6.16 aux indices  $b_1$   $b_2$ , la construction des amplitudes dans  $\Psi(n_4)$ ,  $\Phi(n_2)$  et  $\Psi(n_2)$  est totalement

analogue. D'après le point *viii*) de la proposition 6.9.3, on sait que  $\Phi(n_4) \cap \mathcal{I}_{se} = \{n_4\}$ . La condition de bord (6.119) écrite pour  $k = n_4$  s'écrit donc sous la forme (quitte à choisir  $n_4$  comme représentant de sa classe d'équivalence pour la relation  $\sim_\Phi$ ):

$$B_1 \left[ \sum_{j \in \Phi(n_4) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee})} u_{0,j} + U_{0,n_4,1|_{X_1=0}} \right]_{|_{x_1=0}} = -B_1 u_{0,n_4|_{x_1=0}}, \text{ si } n_4 \in \mathfrak{R}_1, \quad (6.134)$$

$$B_1 \left[ \sum_{j \in \Phi(n_4) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee})} u_{0,j} \right]_{|_{x_1=0}} = -B_1 u_{0,n_4|_{x_1=0}}, \text{ si } n_4 \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathfrak{R}_1, \quad (6.135)$$

où l'on rappelle que dans les deux cas le terme source est un élément de  $H_p^K$  déterminé par l'équation (6.133).

On applique la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme aux équations (6.134) et (6.135). On compose ensuite (6.134) et (6.135), par les projecteurs  $P_1^j$  pour  $j \in \Phi(n_4) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee})$ , et l'équation (6.134) par le projecteur  $P_{s,1}^{n_4}$ , ce qui permet de se ramener à résoudre les conditions de bord découplées suivantes :

$$\forall j \in \Phi(n_4) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee}), u_{0,j|_{x_1=0}} = -S_1^j B_1 u_{0,n_4|_{x_1=0}}, \quad (6.136)$$

$$\text{et si } n_4 \in \mathfrak{R}_1, U_{0,n_4,1|_{X_1=x_1=0}} = -S_{s,1}^j B_1 u_{0,n_4|_{x_1=0}}. \quad (6.137)$$

Ainsi, la détermination de l'éventuelle amplitude évanescence pour la face  $\Omega_1$  se fait indépendamment de la détermination des amplitudes oscillantes.

On commence par rappeler succinctement comment on détermine les amplitudes associées aux phases oscillantes.

$$\diamond j \in \mathcal{I}_{es} \cap \Phi(n_4).$$

Le lemme de Lax et la condition de polarisation permettent de montrer que l'amplitude  $u_{0,j}$  est solution d'une équation de transport à vitesse entrante-sortante  $v_j$ . C'est pourquoi, pour déterminer cette amplitude, seule la connaissance de la trace sur la face  $\partial\Omega_1$  est nécessaire. Or, cette trace est déterminée en (6.136). Intégrant le long des caractéristiques, l'amplitude  $u_{0,j}$  est donnée par la formule :

$$u_{0,j}(t, x) = S_1^j B_1 u_{0,n_4|_{x_1=0}}(t_{es}^j(t, x_1), x_{es}^j(x)). \quad (6.138)$$

Un point important pour la suite de la construction du développement BKW (et plus particulièrement pour la détermination des éventuelles amplitudes entrantes-entrantes dans l'arbre  $B_{b_j}$ ) est que l'amplitude  $u_{0,j}$  qui est dans  $H^K(\Omega_T)$  pour tout  $T > 0$ , en tant que solution d'une équation de transport à terme source admet aussi une trace sur la face  $\partial\Omega_2$  dans  $H_p^K$ . Il suffit en effet de le vérifier sur la formule (6.138).

En d'autres termes, le caractère "plat" au coin du terme source  $g^\varepsilon$  se transmet aux racines des arbres.

$$\diamond j \in \mathcal{I}_{ee} \cap \Phi(n_4).$$

Dans ce cas,  $u_{0,j}$  est solution d'une équation de transport à vitesse entrante-entrante et sa construction nécessite la connaissance de ses traces sur les deux faces  $\partial\Omega_1$  et  $\partial\Omega_2$ . La condition de bord (6.136) donne la trace sur la face  $\partial\Omega_1$ . Concernant la trace sur la face  $\partial\Omega_2$ , le point *ix*) de la proposition 6.9.3 montre que  $j$  est le seul élément de sa classe d'équivalence pour la relation  $\sim_\Psi$  ; en particulier  $j \notin \mathfrak{R}_2$ . Par conséquent, la condition de bord (6.119) écrite pour  $k = j$  est de la forme :

$$B_2 u_{0,j|_{x_2=0}} = 0.$$

D'après la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme et la polarisation de  $u_{0,j}$ , on en déduit que  $u_{0,j}|_{x_2=0} = 0$ . Donc l'amplitude  $u_{0,j}$  doit satisfaire l'équation de transport

$$\begin{cases} (\partial_t + v_j \cdot \nabla_x) Q_1^j u_{0,j} = 0, \\ u_{0,j}|_{x_1=0} = -S_1^j B_1 u_{0,n_4}|_{x_1=0}, \\ u_{0,j}|_{x_2=0} = 0, \\ u_{0,j}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation, on procède comme dans la démonstration de la proposition 6.4.1. C'est-à-dire que l'on utilise le fait que le terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  est plat au coin pour se ramener à résoudre une équation de transport dans le demi-espace  $\{x_1 \geq 0\}$  et on restreint ensuite la solution obtenue au quart d'espace.

De plus, on peut vérifier que l'amplitude  $u_{0,j}$  ainsi construite vérifie que pour tout  $\underline{x}_1 \geq 0$ ,  $u_{0,j}|_{x_1=\underline{x}_1} \in H_p^K$ . Cette régularité de l'amplitude  $u_{0,j}$  sera nécessaire lors de la construction des amplitudes d'ordre supérieur pour lesquelles l'amplitude  $u_{0,j}$  jouera le rôle d'un terme source à l'intérieur de l'équation de transport et devra donc être étendue pour les  $x_2$  négatifs (cf. proposition 6.4.2).

♦  $n_4 \in \mathfrak{R}_1$  La détermination des amplitudes associées à des indices évanescents pour la face  $\partial\Omega_1$  étant nouvelle dans ce chapitre, on va la décrire de façon moins succincte. Mais, on peut remarquer que la méthode pour construire les amplitudes liées à des indices dans  $(\mathcal{I}_{ev1} \cup \mathcal{I}_{ev2})$  suit la même philosophie que celle pour déterminer les amplitudes pour les phases oscillantes. En effet, comme on va le voir, pour déterminer ces amplitudes, il suffira de connaître leurs traces (sur  $\partial\Omega_1$  pour les éléments de  $\mathcal{I}_{ev1}$  et celle sur  $\partial\Omega_2$  pour les éléments de  $\mathcal{I}_{ev2}$ ).

Cependant, on a ici décidé de traiter les modes évanescents en un seul bloc comme dans [Les07] ; c'est pourquoi les amplitudes associées ne vérifient pas d'équation de transport comme les phases oscillantes. Ainsi, dans un premier temps on rappelle les équations d'évolution ainsi que les conditions de bord que doivent vérifier ces amplitudes. Puis on donnera la méthode de résolution de ces systèmes.

Après l'injection de l'ansatz (6.113) dans l'équation d'évolution du problème à coin (6.95) on avait vu que l'amplitude  $U_{n,n_4,1}$  devait vérifier la cascade d'équation :

$$\begin{cases} L_{n_4}(\partial_{X_1}) U_{0,n_4,1} = 0, \\ L_{n_4}(\partial_{X_1}) U_{n,n_4,1} - L(\partial) U_{n-1,n_4,1} = 0, \quad \forall n \geq 1, \end{cases} \quad (6.139)$$

avec la notation :

$$L_{n_4}(\partial_{X_1}) := A_1 \left( \partial_{X_1} - \mathcal{A}_1(\underline{t}, \underline{\xi}_2^{n_4}) \right).$$

On a déjà étudié la condition de bord pour (6.139), elle est donnée, dans le cas  $n_4 \in \mathfrak{R}_1$  par l'équation (6.137). Donc, l'amplitude  $U_{0,n_4,1}$  doit vérifier le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{n_4}(\partial_{X_1}) U_{0,n_4,1} = 0, \\ (6.138), \\ U_{0,n_4,1}|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.140)$$

On rappelle aussi le lemme suivant, voir [Les07], qui affirme que la résolution des équations de la forme (6.140) est effectivement possible dans les ensembles des profils  $P_{ev,1}$ .

**Lemme 6.9.3** Pour  $i = 1, 2$ , et  $\underline{k} \in \mathfrak{R}_i$ , on pose

$$\mathbb{P}_{ev,i}^{\underline{k}} U(X_i) := e^{X_i \mathcal{A}_i(\tau, \xi_{3-i}^{\underline{k}})} P_{s,i}^{\underline{k}} U(0), \quad (6.141)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{ev,i}^{\underline{k}} F(X_i) &:= \int_0^{X_i} e^{(X_i-s) \mathcal{A}_i(\tau, \xi_{3-i}^{\underline{k}})} P_{s,i}^{\underline{k}} A_i^{-1} F(s) ds \\ &\quad - \int_{X_i}^{+\infty} e^{(X_i-s) \mathcal{A}_i(\tau, \xi_{3-i}^{\underline{k}})} P_{u,i}^{\underline{k}} A_i^{-1} F(s) ds. \end{aligned} \quad (6.142)$$

Alors, pour tout  $F \in P_{ev,i}$  l'équation :

$$L_{\underline{k}}(\partial_{X_i})U = F,$$

admet une solution dans  $P_{ev,i}$ . De plus, cette dernière peut s'écrire sous la forme

$$U = \mathbb{P}_{ev,i}^{\underline{k}} U + \mathbb{Q}_{ev,i}^{\underline{k}} F.$$

Ce lemme indique que l'amplitude évanescence principale  $U_{0,n_4,1}$  vérifiera  $\mathbb{P}_{ev,1}^{n_4} U_{0,n_4,1} = U_{0,n_4,1}$ , relation analogue à la condition de polarisation pour les phases oscillantes qui, au vu de la définition de  $\mathbb{P}_{ev,1}^{n_4}$ , permet de déterminer  $U_{0,n_4,1}$  à condition de connaître sa trace sur  $\{X_1 = 0\}$ .

Or le système (6.140) ne fournit pas d'informations sur cette trace mais seulement sur "la double trace" sur  $\{x_1 = X_1 = 0\}$ . Cette "double" trace est déterminée par l'équation (6.137), que l'on réécrit ici :

$$U_{0,n_4,1}|_{X_1=x_1=0} = -S_{s,1}^j B_1 u_{0,n_4}|_{x_1=0}.$$

Il faut ensuite relever cette double trace en une trace "simple". Comme dans [Les07], on pose, par exemple :

$$U_{0,n_4,1}(t, x, 0) := -\chi(x_1) S_{s,1}^j B_1 u_{0,n_4}|_{x_1=0},$$

où  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant  $\chi(0) = 1$ .

Maintenant, que la trace sur  $\{X_1 = 0\}$  est déterminée, on peut lui appliquer l'opérateur  $\mathbb{P}_{ev,1}^{n_4}$ . Ainsi, par construction, l'amplitude

$$U_{0,n_4,1}(t, x, X_1) = -\chi(x_1) e^{X_1 \mathcal{A}_1(\tau, \xi_2^{n_4})} S_{s,1}^{n_4} B_1 u_{0,n_4}|_{x_1=0}(t, x_2), \quad (6.143)$$

vérifie le système d'équation (6.140), ce qui conclut la construction de l'amplitude  $U_{0,n_4,1}$ .

La construction des amplitudes évanescences pour la face  $\partial\Omega_2$  qui peuvent apparaître lorsque l'on détermine les amplitudes indexées par des indices dans  $\Psi(n_3)$  et  $\Psi(n_1)$ , est entièrement similaire. Par exemple, pour les indices dans  $\Psi(n_3)$ , on commence par déterminer la trace de  $U_{0,n_3,2}$  sur  $\{x_2 = X_2 = 0\}$ , puis on relève cette "double trace" en une "trace simple" sur  $\{X_2 = 0\}$ . Cette trace simple est ensuite propagée à l'intérieur du domaine par l'opérateur  $\mathbb{P}_{ev,2}^{n_3}$ .

On reprend la construction ci-dessus pour tous les indices voisins de la boucle ; ainsi, les indices dont les amplitudes restent à déterminer dans la partition (6.122) sont les suivants :

$$(\cup_{a_l} A_{a_l} \setminus \{a_l\}) \bigcup (\cup_{b_m} B_{b_m} \setminus \{b_m\}) \bigcup (\cup_{c_q} C_{c_q} \setminus \{c_q\}) \bigcup (\cup_{d_r} D_{d_r} \setminus \{d_r\}),$$

c'est-à-dire qu'il ne reste plus qu'à déterminer les amplitudes dans les arbres de la partition (6.122). Cependant, avant de s'atteler à cette construction il est nécessaire de décrire la structure interne de ces arbres. Ceci fait l'objet du sous-paragraphe suivant.

**Structure locale des arbres.**

Dans ce sous-paragraphe, on explore plus en profondeur la structure interne des arbres  $A_{a_l}$  apparaissant dans la partition (6.122). La description de la structure des arbres  $B_{b_m}$ ,  $C_{c_q}$  et  $D_{d_r}$  est analogue ; c'est pourquoi on ne traite que le cas des arbres  $A_{a_l}$ . On rappelle que l'arbre  $A_{a_l}$  a pour racine un indice  $a_l \in (\Psi(n_1) \cap \mathcal{I}_{se}) \setminus \{n_4\}$  et est constitué des indices  $j$  reliés à  $a_l$  par une suite de type  $H$  (cf. définition 6.9.4). Dans un souci d'allégement des notations on notera  $A_{a_l} := A_{\underline{a}}$ .

On commence l'étude locale de l'arbre  $A_{\underline{a}}$  par la proposition suivante qui a déjà été mentionnée dans le sous-paragraphe 6.9.3.

**Proposition 6.9.6** *Soit  $j \in A_{\underline{a}}$ , alors il existe une **unique** suite  $\ell$  de type  $H$  reliant  $j$  à  $\underline{a}$ .*

**Démonstration :** Par l'absurde, soit  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$  et  $\ell' = (\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_{p'})$ ,  $\ell \neq \ell'$ , deux suites de type  $H$  qui relient  $j$  à  $\underline{a}$ . On fait une étude de cas selon la parité des longueurs  $p$  et  $p'$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $p \leq p'$ .

$\diamond p, p' \in 2\mathbb{N}$ .

On distingue encore deux cas :

- Si  $\ell' = (\ell, \ell'_{p+1}, \dots, \ell'_{p'})$ , on a alors  $\ell'_{p+1} \in \Phi(\ell'_{p'})$  ce qui permet de montrer que la suite  $(\ell'_{p+2}, \dots, \ell'_{p'})$  est une boucle pour l'indice  $\ell'_{p+1}$  contenant  $p' - p - 1$  éléments, chose impossible d'après l'hypothèse 6.9.2.

- Si  $\ell' \neq (\ell, \ell'_{p+1}, \dots, \ell'_{p'})$ .

On note  $m$  le premier rang tel que  $\ell_m \neq \ell'_m$ . L'étude du cas précédent permet de supposer que  $1 \leq m < p$ . On traite ici le cas  $m \in 2\mathbb{N} + 1$  (le cas  $m \in 2\mathbb{N}$  se traitant de la même manière à interversion des types de suite près). On a alors,  $\ell_m \in \Phi(\ell'_m)$ .

On distingue les deux sous-cas suivants :

- Il existe  $l$ ,  $m + 1 < l \leq p$  tel que  $k_l = k'_l$ . On pose alors  $\underline{l}$  le premier des rangs  $l$ ,  $m + 1 < l \leq p$  tels que  $k_l = k'_l$ . Alors si  $\underline{l} \in 2\mathbb{N}$  (resp.  $\underline{l} \in 2\mathbb{N} + 1$ ), on a  $\ell_{\underline{l}-1} \in \Psi(\ell'_{\underline{l}-1})$  (resp.  $\ell_{\underline{l}-1} \in \Phi(\ell'_{\underline{l}-1})$ ). Ainsi, la suite  $(\ell'_m, \dots, \ell'_{\underline{l}-1})$  est une suite de type  $H$  reliant  $\ell_{\underline{l}-1}$  à  $\ell_m$ , la suite  $(\ell_{m+1}, \dots, \ell_{\underline{l}-2})$  une suite de type  $V$  reliant  $\ell_{\underline{l}-1}$  à  $\ell_m$ . Par conséquent, la suite  $(\ell'_m, \dots, \ell'_{\underline{l}-1}, \ell_{\underline{l}-1}, \ell_{\underline{l}-2}, \dots, \ell_{m+1})$  est une boucle pour l'indice  $\ell_m$  ce qui est exclu par l'hypothèse 6.9.2.

- Si pour tout les rangs  $q \in \{m + 2, \dots, p\}$  les indices  $\ell_q$  et  $\ell'_q$  sont distincts, on montre alors facilement que la suite  $(\ell'_m, \dots, \ell'_p, \ell_p, \dots, \ell_{m-1})$  est une boucle pour l'indice  $\ell_m$ .

$\diamond p \in 2\mathbb{N}$ ,  $p' \in 2\mathbb{N} + 1$ .

Si  $\ell' = (\ell, \ell'_{p+1}, \dots, \ell'_{p'})$ , on montre alors facilement que la suite  $(\ell'_{p+1}, \dots, \ell'_{p'})$  est une boucle pour l'indice  $j$ .

Sinon, on peut reprendre la même analyse que dans le cas  $p, p' \in 2\mathbb{N}$  pour traiter le sous-cas, " Il existe  $l$ ,  $m + 1 < l \leq p$  tel que  $\ell_l = \ell'_l$ ". Si pour tous les rangs  $q \in \{m + 2, \dots, p\}$ ,  $\ell_q$  et  $\ell'_q$  sont distincts, on montre alors que la suite  $(\ell'_m, \dots, \ell'_p, j, \ell_p, \dots, \ell_{m-1})$  est une boucle pour l'indice  $\ell_m$ .

Le cas  $p, p' \in 2\mathbb{N} + 1$  est analogue à inversion des applications  $\Phi$  et  $\Psi$  près au cas où  $p, p' \in 2\mathbb{N}$ . C'est pourquoi, on ne le traitera pas ici.

□

**Remarque** Comme indiqué dans le sous-paragraphe 6.9.3, l'unicité de la suite reliant un indice  $\underline{j} \in A_{\underline{a}}$  à la racine  $\underline{a}$  est fortement dépendante de l'hypothèse d'unicité de la boucle.

Grâce à l'unicité de la suite de type  $H$  reliant l'indice  $\underline{j} \in A_{\underline{a}}$  à la racine  $\underline{a}$ , on peut raffiner une dernière fois les propriétés des applications  $\Phi$  et  $\Psi$  :



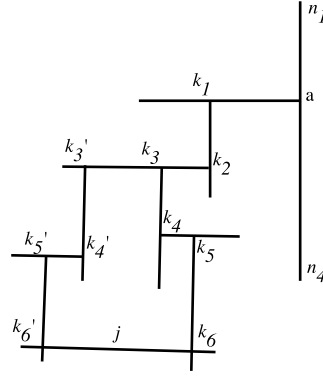


Figure 6.17: Illustration de la démonstration de la proposition 6.9.6.

**Proposition 6.9.7** Soit  $\underline{j} \in A_{\underline{a}}$ , on note  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  la suite de type  $H$  reliant  $\underline{j}$  à  $\underline{a}$ . On distingue les cas suivants selon la parité de  $p$  :

- $x')$  Si  $p \in 2\mathbb{N}$ , alors  $\underline{j} \notin \mathcal{I}_{se}$  et de plus si  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{ev1} \cup \mathcal{I}_{ee}$  alors  $\Psi(\underline{j}) = \{\underline{j}\}$ .
- $x'')$  Si  $p \in 2\mathbb{N} + 1$ , alors  $\underline{j} \notin \mathcal{I}_{es}$  et de plus si  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{ev2} \cup \mathcal{I}_{ee}$  alors  $\Phi(\underline{j}) = \{\underline{j}\}$ .

**Démonstration :** On traite le cas  $p \in 2\mathbb{N}$  et on commence par montrer que  $\underline{j} \notin \mathcal{I}_{se}$ . Par l'absurde, on suppose que  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{se}$ , l'hypothèse de minimalité sur l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$  permet alors de se ramener au cas où  $\Psi(\underline{j}) \cap \mathcal{I}_{es} \neq \emptyset$ . Soit  $\underline{i} \in \Psi(\underline{j}) \cap \mathcal{I}_{es}$ , d'après l'analyse du sous-paragraphe 6.9.3, on a alors  $\underline{i} \in A_{\underline{a}}$ . Soit  $\ell' = (\ell'_1, \dots, \ell'_{p'})$  la suite reliant  $\underline{i}$  à la racine  $\underline{a}$ . Reprenant, les mêmes études de cas que pour la démonstration de la proposition 6.9.6, on peut se restreindre à étudier le cas où  $\ell_i \neq \ell'_i$  pour tout  $i$ . Si  $p' \in 2\mathbb{N}$ , on montre alors que la suite  $(\ell', \underline{i}, \underline{j}, \ell_p, \dots, \ell_2)$  est une boucle de taille impaire pour l'indice  $\ell_1$ , tandis que si  $p' \in 2\mathbb{N} + 1$ , on montre que la suite  $(\ell', \underline{i}, \ell_p, \dots, k_2)$  est une boucle pour  $k_1$ . Ces deux cas de figure étant en contradiction avec l'hypothèse 6.9.2.

La démonstration du fait que si  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev1}$  alors  $\Psi(\underline{j}) = \{\underline{j}\}$  suit exactement le même raisonnement.

□

La même proposition (avec d'éventuelles adaptation sur la parité selon le type d'arbre considéré) est vraie pour les autres arbres.

En terme de rebond de paquets d'ondes, la proposition 6.9.7 affirme, d'une part, que lors d'un rebond sur la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ), une phase sortante-entrante (resp. entrante-sortante) ne peut pas générer de phase sortante-entrante (resp. entrante-sortante). Et d'autre part que, sous l'hypothèse d'unicité de la boucle, le fait qu'une phase entrante-entrante voisine de la boucle ne puisse être générée que par un rebond sur l'une des faces (c.f.  $ix$ ) de la proposition 6.9.3), se généralise à toutes les amplitudes associées à des vitesses de groupe entrantes-entrantes.

### Détermination des amplitudes liées à des indices dans les arbres.

Maintenant que l'on connaît avec précision la structure interne des arbres, on montre qu'il est très facile de déterminer les amplitudes liées aux indices dans les arbres, et ainsi de conclure la construction de l'amplitude principale du développement BKW. Une fois de plus, on se concentrera sur la

détermination des amplitudes pour un arbre  $A_{\underline{a}}$ , le cas des autres types d'arbres étant similaire.

On prend un indice quelconque  $\underline{j} \in A_{\underline{a}}$  et on va montrer que l'on peut toujours déterminer l'amplitude  $u_{0,\underline{j}}$ . D'après la proposition 6.9.6, on sait qu'il existe une unique suite  $\ell^{\underline{j}} = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  de type  $H$  reliant  $\underline{j}$  à la racine  $\underline{a}$ . La première étape pour déterminer l'amplitude  $u_{0,\underline{j}}$  est de remarquer qu'indépendamment de la détermination de  $u_{0,\underline{j}}$ , on peut toujours déterminer les amplitudes  $u_{0,\ell_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

En effet, par définition des suites de type  $H$  (voir définition 6.9.4), on a  $\ell_1 \in \Phi(\underline{a}) \cap \mathcal{I}_{es}$ . Donc, l'amplitude  $u_{0,\ell_1}$  est solution d'une équation de transport de la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_{\ell_1} \cdot \nabla_x) Q_1^{\ell_1} u_{0,\ell_1} = 0, \\ B_1 \left[ \sum_{i \in \Phi(\ell_1) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee})} u_{0,i|_{x_1=0}} \right] = -B_1 u_{0,\underline{a}|_{x_1=0}}, & \text{si } \ell_1 \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathfrak{R}_1, \\ u_{0,\ell_1|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (6.144)$$

$$\begin{cases} (\partial_t + v_{\ell_1} \cdot \nabla_x) Q_1^{\ell_1} u_{0,\ell_1} = 0, \\ B_1 \left[ \sum_{i \in \Phi(\ell_1) \cap (\mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{ee})} u_{0,i} + U_{0,\ell_1,1|_{x_1=0}} \right]_{|_{x_1=0}} = -B_1 u_{0,\underline{a}|_{x_1=0}}, & \text{si } \ell_1 \in \mathfrak{R}_1, \\ u_{0,\ell_1|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases}$$

car les éléments de  $\Phi(\ell_1)$  sont reliés à  $\underline{a}$  par une suite de taille zéro donc d'après le point  $x'$  de la proposition 6.9.7, on a  $\Phi(\ell_1) \cap \mathcal{I}_{se} = \{\underline{a}\}$ . Par conséquent, composant la condition de bord de (6.144) par  $S_1^{\ell_1}$  (voir définition 6.9.7), on peut écrire :

$$u_{0,\ell_1|_{x_1=0}} = -S_1^{\ell_1} B_1 u_{0,\underline{a}|_{x_1=0}}.$$

Cette équation détermine de façon unique la trace de  $u_{0,\ell_1}$  sur la face  $\partial\Omega_1$  car l'amplitude  $u_{0,\underline{a}}$  ainsi que ses traces ont été déterminées dans le sous-paragraphe 6.9.3. Donc intégrant l'équation (6.144) le long des caractéristiques, on détermine  $u_{0,\ell_1} \in H^K(\Omega_T)$ , puis sa trace  $u_{0,\ell_1|_{x_2=0}} \in H_p^K$ .

On s'intéresse ensuite à la construction de l'amplitude  $u_{0,\ell_2}$ , par définition des suites de type  $H$ , on a  $\ell_2 \in \Psi(\ell_1) \cap \mathcal{I}_{se}$ . Une nouvelle fois, on peut appliquer la proposition 6.9.7, et montrer que  $\Psi(\ell_2) \cap \mathcal{I}_{es} = \{\ell_1\}$ . Par conséquent, l'équation de transport satisfaite par l'amplitude  $u_{0,\ell_2}$  peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_{\ell_2} \cdot \nabla_x) Q_2^{\ell_2} u_{0,\ell_2} = 0, \\ u_{0,\ell_2|_{x_2=0}} = -S_2^{\ell_2} B_2 u_{0,\ell_1|_{x_2=0}}, \\ u_{0,\ell_2|_{t \leq 0}} = 0, \end{cases} \quad (6.145)$$

que l'on résout en intégrant le long des caractéristiques.

On réitère ensuite les mêmes résolutions d'équations de transport pour tous les indices de la suite  $\ell$ , ce qui permet de déterminer toutes les amplitudes  $u_{0,\ell_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Le point important dans cette construction est que puisque la trace de l'amplitude  $u_{0,\underline{a}}$  sur  $\partial\Omega_1$  est dans  $H_p^K$ , cette régularité se transmet à toutes les amplitudes de la branche  $\ell$ .

En effet, réitérant la même démonstration que celle de la proposition 6.4.1, on peut montrer que les traces  $u_{0,\ell_l|_{x_2=0}}$  et  $u_{0,\ell_l|_{x_1=0}}$  sont dans  $H_p^K$ , pour tout  $1 \leq l \leq p$ .

Une fois les amplitudes sur la branche  $\ell$  déterminées, il est aisé de déterminer l'amplitude  $u_{0,\underline{j}}$ . On distingue les cas suivants en fonction du type de l'indice  $\underline{j}$ .

$$\diamond \underline{j} \in \mathcal{I}_{es} \text{ (resp. } \underline{j} \in \mathcal{I}_{se}).$$

D'après la proposition 6.9.7, on sait qu'un indice dans  $\mathcal{I}_{es} \cap A_{\underline{a}}$  (resp.  $\mathcal{I}_{se}$ ) ne peut apparaître

qu'après un nombre pair (resp. impair) de rebonds, donc la longueur de la suite  $\ell$ ,  $p \in 2\mathbb{N}$  (resp.  $p \in 2\mathbb{N} + 1$ ). Puisque  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{es}$  (resp.  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{se}$ ), il est suffisant pour construire l'amplitude  $u_{0,\underline{j}}$  de déterminer la trace  $u_{0,\underline{j}|x_1=0}$  (resp.  $u_{0,\underline{j}|x_2=0}$ ). Or, la proposition 6.9.7, implique que  $\ell_p$  est le seul élément de  $\mathcal{I}_{se}$  (resp.  $\mathcal{I}_{es}$ ) dans  $\Phi(\underline{j})$  (resp.  $\Psi(\underline{j})$ ). Appliquant  $S^j$  à (6.119) pour  $k = \underline{j}$ , on peut déterminer la trace  $u_{0,\underline{j}|x_1=0}$  (resp.  $u_{0,\underline{j}|x_2=0}$ ) en fonction de la trace  $u_{0,\ell_p|x_1=0}$  (resp.  $u_{0,\ell_p|x_2=0}$ ) et donc construire l'amplitude  $u_{0,\underline{j}}$  par intégration le long des caractéristiques.

De plus, on montre que l'amplitude  $u_{0,\underline{j}} \in H^K(\Omega)$ , et que ses traces sur les faces  $\partial\Omega_1$  et  $\partial\Omega_2$  sont dans  $H_p^K$ .

$\diamond \underline{j} \in \mathcal{I}_{ee}$ .

Un indice entrant-entrant peut apparaitre au bout d'une branche de taille paire ou bien impaire. On traite ici le cas pair, le cas impair étant entièrement similaire. La proposition 6.9.7 assure d'une part que  $\ell_p$  est le seul élément dans  $\Phi(\underline{j}) \cap \mathcal{I}_{se}$  et d'autre part que  $\Psi(\underline{j}) = \{\underline{j}\}$ . Ainsi, les conditions de bord pour l'amplitude  $u_{0,\underline{j}}$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} u_{0,\underline{j}|x_1=0} &= -S_1^j B_1 u_{0,\ell_p|x_1=0}, \\ u_{0,\underline{j}|x_2=0} &= 0. \end{aligned}$$

Donc l'amplitude  $u_{0,\underline{j}}$  doit satisfaire l'équation de transport à vitesse entrante-entrante suivante :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_{\underline{j}} \cdot \nabla_x) Q_1^j u_{0,\underline{j}} = 0, \\ u_{0,\underline{j}|x_1=0} = -S_1^j B_1 u_{0,\ell_p|x_1=0}, \\ u_{0,\underline{j}|x_2=0} = 0, \\ u_{0,\underline{j}|t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.146)$$

équation que l'on résout comme dans la proposition 6.4.1, c'est-à-dire, en prolongeant le terme source  $-S_1^j B_1 u_{0,\ell_p|x_1=0}$  par zéro sur les  $x_2$  négatifs (ce prolongement donne lieu à une fonction régulière car  $u_{0,\ell_p|x_1=0} \in H_p^\infty$ ) puis en résolvant l'équation dans le demi-espace  $x_1 \geq 0$  et enfin en restreignant la solution obtenue aux  $x_2 \geq 0$ .

On a donc construit  $u_{0,\underline{j}} \in H^\infty(\Omega_T)$ , pour tout  $T > 0$ , telle que pour tout  $\underline{x}_1 \geq 0$ ,  $u_{0,\underline{j}|x_1=\underline{x}_1} \in H_p^\infty$ .

$\diamond \underline{j} \in \mathfrak{R}_1$  (resp.  $\underline{j} \in \mathfrak{R}_2$ ).

Comme dans le cas  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{es}$  (resp.  $\underline{j} \in \mathcal{I}_{se}$ ), la proposition 6.9.7 implique qu'un indice évanescent pour la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ) ne peut apparaitre qu'au bout d'une branche de taille paire (resp. impaire). Et cette même proposition assure aussi que le seul indice dans  $\mathcal{I}_{se}$  (resp.  $\mathcal{I}_{es}$ ) dans  $\Phi(\underline{j})$  (resp.  $\Psi(\underline{j})$ ) est  $\ell_p$ . On doit alors construire l'amplitude évanescente  $U_{0,\underline{j},1}$  (resp.  $U_{0,\underline{j},2}$ ).

Réitérant la même construction qu'au sous-paragraphe 6.9.3, lorsque l'on construit l'amplitude évanescente  $U_{0,\underline{j},1}$  (resp.  $U_{0,\underline{j},2}$ ), il faut commencer par déterminer sa "double" trace sur l'ensemble  $\{X_1 = x_1 = 0\}$  (resp.  $\{X_2 = x_2 = 0\}$ ). Or, le fait que  $\ell_p$  soit le seul élément de  $\mathcal{I}_{se}$  (resp.  $\mathcal{I}_{es}$ ) dans  $\Phi(\underline{j})$  (resp.  $\Psi(\underline{j})$ ), permet de montrer que cette "double" trace s'écrit sous la forme :

$$U_{0,\underline{j},1}(t, 0, x', 0) = -S_{s,1}^j B_1 u_{0,\ell_p|x_1=0}, \quad \left( \text{resp. } U_{0,\underline{j},2}(t, x', 0, 0) = -S_{s,2}^j B_2 u_{0,\ell_p|x_2=0} \right).$$

On redresse ensuite cette "double" trace, en une trace "simple" en posant :

$$U_{0,\underline{j},1}(t, x, 0) := -\chi(x_1) S_{s,1}^j B_1 u_{0,\ell_p|x_1=0}, \quad \left( \text{resp. } U_{0,\underline{j},2}(t, x, 0) := -\chi(x_2) S_{s,2}^j B_2 u_{0,\ell_p|x_2=0} \right),$$

où  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  est telle que  $\chi(0) = 1$ . Enfin, le lemme 6.9.3 montre que la fonction  $U_{0,\underline{j},1}$  (resp.  $U_{0,\underline{j},2}$ ) définie par :

$$\begin{aligned} U_{0,\underline{j},1}(t, x, X_1) &= -\chi(x_1) e^{X_1 \mathcal{A}_1(\tau, \xi_2^j) S_{s,1}^j} B_1 u_{0,\ell_p|_{x_1=0}}, \\ \left( \text{resp. } U_{0,\underline{j},2}(t, x, X_2) \right. &= \left. -\chi(x_2) e^{X_2 \mathcal{A}_2(\tau, \xi_1^j) S_{s,2}^j} B_2 u_{0,\ell_p|_{x_2=0}} \right), \end{aligned} \quad (6.147)$$

est une solution des cascades d'équations (6.114)-(6.119) et (6.120) écrites pour  $n = 0$  et  $k = \underline{j}$ .

On a donc dans ce sous-paragraphe montré comment on pouvait construire une amplitude arbitraire dans l'arbre  $A_{\underline{a}}$ . Ainsi, toutes les amplitudes liées à des indices dans l'arbre  $A_{\underline{a}}$  sont construites. On reprend ensuite la même méthode de construction sur chacun des arbres qui constitue la partition (6.122). Ceci permet de déterminer toutes les amplitudes indexées par des indices de  $\mathcal{I} \setminus \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$  et conclut la construction du premier terme du développement BKW. On résume cette construction par la proposition suivante :

**Proposition 6.9.8** *Sous les hypothèses 6.9.1-6.2.2-6.2.3 sur le problème à coin (6.95), si l'ensemble de fréquences complet pour les réflexions  $\mathcal{F}$  vérifie l'hypothèse 6.9.2, et enfin sous l'hypothèse 6.9.4 sur l'opérateur  $I - \mathbb{T}$ , il existe des fonctions  $(u_{0,i})_{i \in \mathcal{I}_{os}}$ ,  $(U_{0,i,1})_{i \in \mathfrak{R}_1}$  et  $(U_{0,i,2})_{i \in \mathfrak{R}_2}$  qui vérifient les cascades d'équations (6.114)-(6.119) et (6.120) écrites pour  $n = 0$ .*

*De plus, les fonctions  $(u_{0,i})_{i \in \mathcal{I}_{os}}$  admettent la régularité suivante : pour tout  $T > 0$ ,*  
 $\diamond$  *si  $i \in \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{se}$  alors  $u_{0,i} \in H^K(\Omega_T)$  et les traces  $u_{0,i|_{x_1=0}}$  et  $u_{0,i|_{x_2=0}}$  sont dans  $H_p^K$ .*  
 $\diamond$  *Si  $i \in \mathcal{I}_{ee}$  alors  $u_{0,i} \in H^K(\Omega_T)$ . De plus, si  $\Psi(i) = \{i\}$  (resp.  $\Phi(i) = \{i\}$ ) alors pour tout  $\underline{x}_1 > 0$  (resp.  $\underline{x}_2 > 0$ ), la trace  $u_{0,i|_{x_1=\underline{x}_1}}$  (resp.  $u_{0,i|_{x_2=\underline{x}_2}}$ ) est dans  $H_p^K$ .*

*Les fonctions  $(U_{0,i,1})_{i \in \mathfrak{R}_1}$  (resp.  $(U_{0,i,2})_{i \in \mathfrak{R}_2}$ ) sont dans  $P_{ev1}$  (resp.  $P_{ev2}$ ).*

On conclut ce sous-paragraphe par la figure 6.18 qui illustre la détermination des amplitudes associées aux phases dans les arbres.

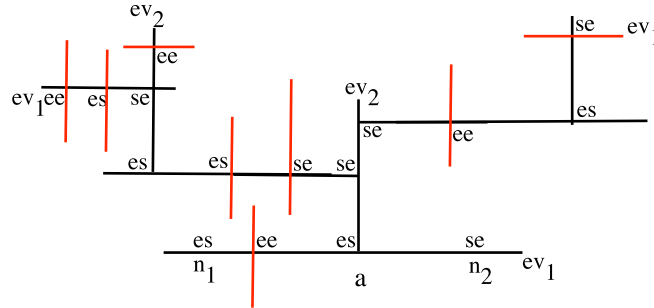


Figure 6.18: Illustration du procédé de détermination des phases dans l'un des arbres D.

### Détermination des termes d'ordre supérieur dans le développement BKW.

La construction des termes d'ordre supérieur dans le développement BKW est assez semblable à celle du premier terme et se base sur les mêmes arguments que ceux l'on a utilisés lors de l'étude de l'équation des ondes (cf. paragraphe 6.4). C'est pourquoi on se contentera ici de décrire les grandes lignes pour le terme d'ordre  $\varepsilon$ . On commence par s'intéresser aux amplitudes liées à des phases

oscillantes.

Pour  $\underline{k} \in \mathcal{I}_{os}$ , l'amplitude  $u_{1,\underline{k}}$  apparait dans les équations :

$$\begin{cases} i\mathcal{L}(d\varphi_{\underline{k}})u_{1,\underline{k}} + L(\partial)u_{0,\underline{k}} = 0, \\ i\mathcal{L}(d\varphi_{\underline{k}})u_{2,\underline{k}} + L(\partial)u_{1,\underline{k}} = 0, \end{cases} \quad (6.148)$$

auquel on adjoint les deux conditions de bord :

$$\begin{aligned} B_1 \left[ \sum_{k \in \Phi(\underline{k}) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{1,k} \right]_{|x_1=0} &= 0, \text{ si } \underline{k} \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathfrak{R}_1, \\ B_1 \left[ \sum_{k \in \Phi(\underline{k}) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{1,k} + U_{1,\underline{k},1}|_{X_1=0} \right]_{|x_1=0} &= 0, \text{ si } \underline{k} \in \mathfrak{R}_1, \end{aligned} \quad (6.149)$$

et

$$\begin{aligned} B_2 \left[ \sum_{k \in \Psi(\underline{k}) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{1,k} \right]_{|x_2=0} &= 0, \text{ si } \underline{k} \in \mathcal{R}_2 \setminus \mathfrak{R}_2 \\ B_2 \left[ \sum_{k \in \Psi(\underline{k}) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{1,k} + U_{1,\underline{k},2}|_{X_2=0} \right]_{|x_2=0} &= 0, \text{ si } \underline{k} \in \mathfrak{R}_2. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Comme dans le paragraphe 6.4, de façon classique, on compose la première équation (6.148) par le pseudo-inverse  $R_1^k$  si  $\underline{k} \in \mathcal{I}_{es}$ ,  $R_2^k$  si  $\underline{k} \in \mathcal{I}_{se}$  et par  $R_1^k$  ou  $R_2^k$  si  $\underline{k} \in \mathcal{I}_{ee}$ . On rappelle que ces pseudo-inverses vérifient : pour  $i = 1, 2$ ,

$$R_i^k \mathcal{L}(d\varphi_{\underline{k}}) = I - P_i^k, \quad P_i^k R_i^k = R_i^k Q_i^k = 0.$$

L'équation d'évolution de (6.148) se réécrit donc sous la forme :

$$(I - P_i^k) u_{1,\underline{k}} = iR_i^k L(\partial) u_{0,\underline{k}}, \quad (6.151)$$

équation qui détermine de façon unique la partie non polarisée de  $u_{1,\underline{k}}$ . En effet, à ce stade de l'analyse, le terme de droite est connu. L'amplitude  $u_{0,\underline{k}}$  étant dans  $H^K(\Omega_T)$  et ayant des traces dans  $H_p^K$ , la partie non polarisée de  $u_{1,\underline{k}}$  est dans  $H^{K-1}(\Omega_T)$  et a ses traces dans  $H_p^{K-1}$ . Pour connaître une amplitude oscillante d'ordre  $\varepsilon$ , il suffit donc de construire sa partie polarisée ; c'est-à-dire  $P_i^k u_{1,\underline{k}}$ .

Pour déterminer la partie polarisée, on reprend la même analyse que celle que l'on a utilisé pour construire l'amplitude d'ordre zéro. On remarque que l'équation d'évolution régissant l'amplitude  $u_{2,\underline{k}}$  :

$$i\mathcal{L}(d\varphi_{\underline{k}})u_{2,\underline{k}} + L(\partial)u_{1,\underline{k}} = 0,$$

s'écrit, après composition par  $Q_1^k$  pour  $\underline{k} \in \mathcal{I}_{es}$ , par  $Q_2^k$  pour  $\underline{k} \in \mathcal{I}_{se}$  et par  $Q_1^k$  ou  $Q_2^k$  pour  $\underline{k} \in \mathcal{I}_{ee}$ , sous la forme :

$$Q_i^k L(\partial) P_i^k u_{1,\underline{k}} = -Q_i^k L(\partial) (I - P_i^k) u_{1,\underline{k}} = -iQ_i^k L(\partial) R_i^k L(\partial) u_{0,\underline{k}}.$$

D'après le lemme de Lax, cette équation est une équation de transport à vitesse de groupe  $v_{\underline{k}}$ . Donc,  $Q_i^k P_i^k u_{1,\underline{k}}$  vérifie la même équation de transport (avec ajout du terme source à l'intérieur

$-iQ_i^k L(\partial) R_i^k L(\partial) u_{0,k}$  que celle que vérifiait  $u_{0,k}$ . On peut donc réitérer exactement la même méthode de construction que celle qui a été développée pour l'amplitude  $u_{0,k}$ .

Plus précisément, on commence par considérer les indices de la boucle, pour fixer les idées, on décrit la construction de  $u_{1,n_4}$ . Comme indiqué plus haut, sa partie non polarisée est déterminée par l'équation (6.151). Pour déterminer la partie polarisée de  $u_{1,n_4}$  puisque cette dernière est transportée selon une vitesse sortante-entrante, il faut déterminer sa trace sur  $\partial\Omega_2$ . Pour déterminer cette trace, il faut refaire le calcul du sous-paragraphe 6.9.3. On obtient alors

$$(I - \mathbb{T})P^{n_1}u_{1,n_1|x_2=0} = G_1,$$

où, la fonction  $G_1 \in H_p^{K-1}$  dépend uniquement des traces des parties non polarisées des amplitudes de la boucle<sup>7</sup>. L'hypothèse 6.9.3, implique donc que  $P^{n_4}u_{1,n_4}$  est solution de l'équation de transport :

$$\begin{cases} (\partial_t + v_{n_4} \cdot \nabla_x) Q_2^{n_4} P_2^{n_4} u_{1,n_4} = -iQ_2^{n_4} L(\partial) R_2^{n_4} L(\partial) u_{0,n_4}, \\ P_2^{n_4} u_{1,n_4}|_{x_2=0} = -S_2^{n_4} B_2 \left[ (I - \mathbb{T})^{-1} G_1 + (I - P_2^{n_4}) u_{1,n_4}|_{x_2=0} + (I - P_1^{n_1}) u_{1,n_1}|_{x_2=0} \right], \\ P_2^{n_4} u_{1,n_4}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

dont on connaît tous les termes sources et donc que l'on peut résoudre par intégration le long des caractéristiques. Puisque le terme source à l'intérieur est dans  $H^{K-2}(\Omega_T)$  et que le terme source sur la bord est dans  $H_p^{K-1}$ , la solution  $P_2^{n_4}u_{1,n_4}$  est dans  $H^{K-2}(\Omega_T)$  à traces dans  $H_p^{K-2}$ . On retrouve ici le résultat habituel selon lequel la construction du terme d'ordre un dans le développement BKW nécessite deux dérivées. Plus généralement, la construction du terme d'ordre  $N_0$  nécessite  $2N_0$  dérivées.

Une fois les amplitudes liées à la boucle déterminées, la construction des parties polarisées des amplitudes oscillantes dans les arbres composant la partition (6.122) suit la même méthode (et surtout le même ordre) que celle décrite dans le sous-paragraphe 6.9.3. C'est pourquoi, on ne la répètera pas ici.

On en vient maintenant à la construction des amplitudes évanescents d'ordre  $\varepsilon$ . Bien que ces amplitudes ne soient pas solutions d'équations de transport, la méthode de construction suit néanmoins les mêmes idées que dans le cas des amplitudes oscillantes. En effet, on remarque que les amplitudes  $U_{1,k,i}$  vont pouvoir être décomposées en une partie polarisée (dont la construction se fera comme celle de  $U_{0,k,i}$ ) et une partie non polarisée qui dépendra de l'amplitude  $U_{0,k,i}$  et qui sera donc déterminée à moindre frais.

On traite ici, seulement le cas des amplitudes évanescents par rapport à la face  $\partial\Omega_1$ , on fixe donc  $\underline{k} \in \mathfrak{R}_1$ . L'amplitude  $U_{1,\underline{k},1}$  vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{\underline{k}}(\partial_{X_1}) U_{1,\underline{k},1} - L(\partial) U_{0,\underline{k},1} = 0, \\ B_1 \left[ \sum_{k \in \Phi(\underline{k}) \cap \mathcal{I}_{os}} u_{1,k} + U_{1,\underline{k},1}|_{x_1=0} \right]_{|x_1=0} = 0, \\ U_{1,\underline{k},1}|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

<sup>7</sup> Plus précisément, avec les mêmes notations qu'au sous-paragraphe 6.9.3 :

$$\begin{aligned} G_1 &:= -S_1^{n_1} B_1 (I - P_1^{n_1}) u_{1,n_1}|_{x_1=0} + S_1^{n_1} B_1 S_2^{n_2} B_2 (I - P_2^{n_2}) u_{1,n_2} \left( t + \frac{1}{v_{n_1,1}} \left[ -1 + \frac{v_{n_1,2}}{v_{n_2,2}} \right] x_1, \frac{v_{n_2,1}}{v_{n_2,2}} \frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}} x_1, 0 \right) \\ &\quad - S_1^{n_1} B_1 S_2^{n_2} B_2 S_1^{n_3} B_1 (I - P_1^{n_3}) u_{1,n_3} \left( t + \frac{1}{v_{n_1,1}} \left[ -1 + \frac{v_{n_1,2}}{v_{n_2,2}} - \frac{v_{n_1,2} v_{n_2,1}}{v_{n_2,2} v_{n_3,1}} \right] x_1, 0, -\frac{v_{n_3,2}}{v_{n_3,1}} \frac{v_{n_2,1}}{v_{n_2,2}} \frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}} x_1 \right) \\ &\quad + S (I - P_2^{n_4}) u_{0,n_4} (t + \alpha x_1, \beta x_1, 0), \end{aligned}$$

or d'après le lemme 6.9.3, on sait que la première équation de ce système admet une solution et que cette dernière s'écrit sous la forme :

$$U_{1,k,1} = \mathbb{P}_{ev1}^k U_{1,k,1} + \mathbb{Q}_{ev1}^k L(\partial) U_{0,k,1},$$

où l'on rappelle que les projecteurs  $\mathbb{P}_{ev1}^k$  et  $\mathbb{Q}_{ev1}^k$  sont définis en (6.141) et (6.142). Donc, comme pour les amplitudes associées à des phases oscillantes, puisque l'amplitude  $U_{0,k,1}$  est connue, la partie non polarisée de  $U_{1,k,1}$ ,  $\mathbb{Q}_{ev1}^k L(\partial) U_{0,k,1}$ , l'est aussi. Il suffit de calculer la partie polarisée  $\mathbb{P}_{ev1}^k U_{1,k,1}$ , et on s'est ramené à l'étude effectuée sur  $U_{0,k,1}$ . En effet, par définition de  $\mathbb{P}_{ev1}^k$ ,  $\mathbb{P}_{ev1}^k U_{1,k,1}$  sera déterminée si on connaît la trace de  $U_{1,k,1}$  sur  $\{X_1 = 0\}$ .

On commence par étudier la "double trace" sur  $\{x_1 = X_1 = 0\}$ . Cette dernière est donnée par la condition de bord (6.152). Or, la proposition 6.9.7 implique que  $(\Phi(k) \cap \mathcal{I}_{se}) = \{i\}$  on peut donc réécrire la condition de bord (6.152) sous la forme :

$$U_{1,k,1}|_{X_1=x_1=0} = -S_{s,1}^k B_1 u_{1,i}|_{x_1=0},$$

où le membre de droite est connu car on a déjà construit les amplitudes oscillantes d'ordre un en  $\varepsilon$ . On conclut la construction en relevant "la double trace" en une trace "simple" sur  $\{X_1 = 0\}$  exactement comme pour l'amplitude  $U_{0,k,1}$ .

Ceci conclut la construction du développement BKW pour un problème à coin. Le théorème que l'on a démontré est le suivant :

**Théorème 6.9.1** *Sous les hypothèses 6.9.1-6.2.2-6.2.3 sur le problème à coin (6.95), si l'ensemble des fréquences complet pour les réflexions  $\mathcal{F}$  vérifie l'hypothèse 6.9.2, et enfin sous l'hypothèse 6.9.4 sur l'opérateur  $I - \mathbb{T}$ , il existe des fonctions  $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathcal{I}_{os}}$ ,  $(U_{n,k,1})_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathcal{R}_1}$  et  $(U_{n,k,2})_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathcal{R}_2}$  qui vérifient les cascades d'équations (6.114)-(6.119) et (6.120).*

*De plus, les fonctions  $u_{n,k}$  admettent la régularité suivante : pour tout  $T > 0$ ,*

- $\diamond$  *Si  $k \in \mathcal{I}_{es} \cup \mathcal{I}_{se}$ , alors  $u_{n,k} \in H^{K-2n}(\Omega_T)$  et les traces  $u_{n,k}|_{x_1=0}$  et  $u_{n,k}|_{x_2=0}$  sont dans  $H_p^{K-2n}$ .*
- $\diamond$  *Si  $n \in \mathcal{I}_{ee}$ , alors  $u_{n,k} \in H^{K-2n}(\Omega_T)$ . De plus, si  $\Psi(k) = \{k\}$  (resp.  $\Phi(k) = \{k\}$ ) alors pour tout  $\underline{x}_1 > 0$  (resp.  $\underline{x}_2 > 0$ ), la trace  $u_{n,k}|_{x_1=\underline{x}_1}$  (resp.  $u_{n,k}|_{x_2=\underline{x}_2}$ ) est dans  $H_p^{K-2n}$ .*

*Les fonctions  $U_{n,k,1}$  (resp.  $U_{n,k,2}$ ) sont dans  $P_{ev1}$  (resp.  $P_{ev2}$ ).*

#### 6.9.4 Justification du développement BKW.

Maintenant que l'on a construit le développement BKW, il reste à montrer que le développement BKW tronqué converge bien vers la solution exacte du problème à coin (6.95). On rappelle que les résultats des chapitres 4 et 5 ne permettent pas de conclure au caractère fortement bien posé dans le cadre général. C'est pourquoi, dans tout ce qui suit, on suppose que le problème à coin (6.95) est fortement bien posé dans  $L^2(\Omega_T)$  au sens de la définition suivante :

**Définition 6.9.9** *On dit que le problème à coin est fortement bien posé si pour tout  $f \in L^2(\Omega_T)$ ,  $g_1 \in L^2(\partial\Omega_{1,T})$  et  $g_2 \in L^2(\partial\Omega_{2,T})$  nulles pour les temps négatifs, le système :*

$$\begin{cases} \partial_t u + A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u = f, \\ B_1 u|_{x_1=0} = g_1, \\ B_2 u|_{x_2=0} = g_2, \\ u|_{t \leq 0} = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution  $u \in L^2(\Omega_T)$  à traces dans  $L^2(\partial\Omega_{1,T})$  et  $L^2(\partial\Omega_{2,T})$ , et vérifiant de plus l'estimation d'énergie :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_1=0}\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}^2 + \|u|_{x_2=0}\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|g_1\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}^2 + \|g_2\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})}^2 \right). \quad (6.152)$$

On rappelle que le théorème 4.2.1 affirme que si les matrices  $B_1$  et  $B_2$  du problème à coin (6.95) définissent des conditions de bord strictement dissipatives et si de plus le système (6.95) est symétrique alors le problème à coin est fortement bien posé.

Pour justifier la convergence du développement BKW on aura besoin de la proposition suivante qui montre que les amplitudes associées aux modes évanescents sont bien régulières et donne leur taille par rapport au petit paramètre  $\varepsilon$ .

**Proposition 6.9.9** *Soit  $U$  une fonction dans  $P_{ev,1}$  (resp.  $P_{ev,2}$ ). Alors les fonctions  $U(t, x, \frac{x_1}{\varepsilon})$  et  $(L(\partial)U(t, x, X_1))|_{X_1=\frac{x_1}{\varepsilon}}$  (resp.  $U(t, x, \frac{x_2}{\varepsilon})$  et  $(L(\partial)U(t, x, X_2))|_{X_2=\frac{x_2}{\varepsilon}}$ ) sont  $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .*

**Démonstration :** On le montre pour  $U$  dans  $P_{ev,1}$ , le cas  $U$  dans  $P_{ev,2}$  étant totalement analogue.

Puisque  $U \in P_{ev,1}$ , par définition, il existe  $\delta > 0$  tel que  $e^{\delta X_1}U(t, x, X_1)$  soit dans  $H^{+\infty}(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$ , donc l'application  $(x_1, X_1) \mapsto U(\cdot, \cdot, x_1, X_1)e^{\delta X_1} \in L_{x_1, X_1}^\infty(L^2(\partial\Omega_{1,T}))$  et l'on a :

$$\begin{aligned} \|U|_{X_1=\frac{x_1}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 &= \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_{1,T}} \left| e^{\delta \frac{x_1}{\varepsilon}} U\left(t, x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) e^{-\delta \frac{x_1}{\varepsilon}} \right|^2 dt dx' dx_1, \\ &= \int_0^{+\infty} \left\| e^{\delta \frac{x_1}{\varepsilon}} U\left(\cdot, \cdot, x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}^2 e^{-2\delta \frac{x_1}{\varepsilon}} dx_1, \\ &\leq \|U e^{\delta \cdot}\|_{L_{x_1, X_1}^\infty(L^2(\partial\Omega_{1,T}))} \int_0^{+\infty} e^{-2\delta \frac{x_1}{\varepsilon}} dx_1 \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Soit  $\partial_y$  un opérateur différentiel, où  $y$  est un élément de l'ensemble  $\{t, x_1, \dots, x_d\}$  alors on a :

$$\|\partial_y U(\cdot, X_1)|_{X_1=\frac{x_1}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2\delta \frac{x_1}{\varepsilon}} \left\| e^{\delta \frac{x_1}{\varepsilon}} \partial_y U\left(\cdot, x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\partial\Omega_{1,T})}^2 dx_1,$$

puisque la substitution  $X_1 \hookrightarrow \frac{x_1}{\varepsilon}$  est faite après la dérivation.

Utilisant ensuite le fait que  $e^{\delta X_1} \partial_y U(t, x_1, X_1) \in H^{+\infty}(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$  on peut montrer en réitérant le même calcul que celui effectué pour  $U|_{X_1=\frac{x_1}{\varepsilon}}$  que

$$\|\partial_y U(\cdot, X_1)|_{X_1=\frac{x_1}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C\varepsilon,$$

il reste juste à appliquer l'inégalité triangulaire pour conclure. □

Pour montrer que le développement BKW tronqué constitue une bonne approximation de la solution exacte du problème à coin (6.95), il faut avant tout être en mesure de donner un sens au développement BKW. On a vu aux paragraphes 6.6 et 6.7 que dans le cas où une infinité de phases était générée par rebonds successifs sur les faces du domaine, donner un sens au développement BKW tronqué n'était pas forcément évident en soi. C'est pourquoi, on évitera cette difficulté en se plaçant dans un cadre où le nombre de phases générées est fini.

**Hypothèse 6.9.5** *On suppose que le nombre de phases générées par rebonds successifs est fini. C'est-à-dire  $\#\mathcal{F} < +\infty$ .*



Sous cette hypothèse, la démonstration de la convergence du développement BKW tronqué vers la solution exacte est assez similaire à celle effectuée pour l'équation des ondes (voir théorème 6.4.1). Il faut juste gérer en plus les amplitudes évanescentes, mais la proposition 6.9.9 montre que ces termes se comportent mieux que les termes oscillants et donc qu'ils ne sont pas dangereux pour démontrer ce résultat de convergence.

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 6.9.2** *Sous les hypothèses 6.9.1-6.2.2-6.2.3 sur le problème à coin (6.95), si l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}$  est complet pour les réflexions et vérifie les hypothèses 6.9.2 et 6.9.5, et sous l'hypothèse 6.9.4 sur l'opérateur  $(I - \mathbb{T})$ , on suppose de plus que le problème à coin (6.95) est fortement bien posé.*

Pour  $N_0 \in \mathbb{N}$ , avec  $N_0 \leq [\frac{K}{2}]$ , où  $[\cdot]$  désigne la fonction partie entière, on définit  $u_{app, N_0}^\varepsilon$  le développement BKW tronqué à l'ordre  $N_0$  :

$$\begin{aligned} u_{app, N_0}^\varepsilon &:= \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_k(t, x)} \sum_{n=0}^{N_0} \varepsilon^n u_{n, k}(t, x) \\ &+ \sum_{k \in \mathfrak{R}_1} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{k, 1}(t, x_2)} \sum_{n=0}^{N_0} \varepsilon^n U_{n, k, 1}\left(t, x, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) + \sum_{k \in \mathfrak{R}_2} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{k, 2}(t, x_1)} \sum_{n=0}^{N_0} \varepsilon^n U_{n, k, 2}\left(t, x, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

où les fonctions  $u_{n, k}$ ,  $U_{n, k, 1}$  et  $U_{n, k, 2}$  sont données par le théorème 6.9.1. Alors, si  $u^\varepsilon$  désigne la solution exacte du problème à coin (6.95), l'erreur  $u^\varepsilon - u_{app, N_0}^\varepsilon$  est  $O(\varepsilon^{N_0+1})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

**Démonstration :** L'écart  $u^\varepsilon - u_{app, N_0+1}^\varepsilon$  vérifie le problème à coin :

$$\begin{cases} L(\partial)(u^\varepsilon - u_{app, N_0+1}^\varepsilon) = f_{N_0+1}^\varepsilon, \\ B_1(u^\varepsilon - u_{app, N_0+1}^\varepsilon)|_{x_1=0} = 0, \\ B_2(u^\varepsilon - u_{app, N_0+1}^\varepsilon)|_{x_2=0} = 0, \\ (u^\varepsilon - u_{app, N_0+1}^\varepsilon)|_{t \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (6.153)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} f_{N_0+1}^\varepsilon &:= \varepsilon^{N_0+1} \left[ \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_k} L(\partial) u_{N_0+1, k} + \sum_{k \in \mathfrak{R}_1} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{k, 1}} (L(\partial) U_{N_0+1, k, 1})|_{X_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \mathfrak{R}_2} e^{\frac{i}{\varepsilon} \psi_{k, 2}} (L(\partial) U_{N_0+1, k, 2})|_{X_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Puisque le problème à coin (6.95) est fortement bien posé, on peut appliquer l'estimation d'énergie (6.152), pour obtenir :

$$\|u^\varepsilon - u_{app, N_0+1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C_T \|f_{N_0+1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\|f_{N_0+1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} &\leq \varepsilon^{N_0+1} \left[ \sum_{k \in \mathcal{I}_{os}} \|L(\partial)u_{N_0+1,k}\|_{L^2(\Omega_T)} \right. \\
&\quad + \sum_{k \in \mathcal{I}_{ev1}} \|L(\partial)U_{N_0+1,k,1}(\cdot, \cdot, X_1)|_{X_1=\frac{x_1}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)} \\
&\quad + \left. \sum_{k \in \mathcal{I}_{ev2}} \|L(\partial)U_{N_0+1,k,2}(\cdot, \cdot, X_2)|_{X_2=\frac{x_2}{\varepsilon}}\|_{L^2(\Omega_T)} \right], \\
&\leq C\varepsilon^{N_0+1},
\end{aligned}$$

car d'après la proposition 6.9.9, les termes  $(L(\partial)U_{N_0,k,1})|_{X_1=\frac{x_1}{\varepsilon}}$  et  $(L(\partial)U_{N_0+1,k,2})|_{X_2=\frac{x_2}{\varepsilon}}$  sont  $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  dans  $L^2(\Omega_T)$  tandis que les termes  $L(\partial)u_{N_0+1,k}$  sont  $O(1)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

On a donc démontré que

$$\|u^\varepsilon - u_{app,N_0+1}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C_T \varepsilon^{N_0+1},$$

il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité triangulaire pour conclure.

□

### 6.9.5 Etude de la condition d'inversibilité.

Dans ce sous-paragraphe, on va donner une condition suffisante (et nécessaire dans certains cas) sous laquelle la condition d'inversibilité (6.129) est vérifiée. On rappelle que la condition d'inversibilité (6.129) s'écrit sous la forme :

$$u_{0,n_1|_{x_2=0}}(t, x_1) - Su_{0,n_1|_{x_2=0}}(t + \alpha x_1, \beta x_1) = S_1^{n_1} g(t + \delta x_1, \kappa x_1), \quad (6.154)$$

avec  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\delta < 0$  et  $\kappa > 0$ . Les expressions exactes de ces paramètres étant données par :

$$\begin{aligned}
S &:= S_1^{n_1} B_1 S_2^{n_2} B_2 S_1^{n_3} B_1 S_2^{n_4} B_2, \\
\alpha &:= \frac{1}{v_{n_1,1}} \left[ -1 + \frac{v_{n_1,2}}{v_{n_2,2}} - \frac{v_{n_1,2}v_{n_2,1}}{v_{n_2,2}v_{n_3,1}} + \frac{v_{n_1,2}v_{n_2,1}v_{n_3,2}}{v_{n_2,2}v_{n_3,1}v_{n_4,2}} \right], \\
\beta &:= \frac{v_{n_4,1} v_{n_3,2} v_{n_2,1} v_{n_1,2}}{v_{n_4,2} v_{n_3,1} v_{n_2,2} v_{n_1,1}}, \\
\delta &:= -\frac{1}{v_{n_1,1}}, \text{ et } \kappa := -\frac{v_{n_1,2}}{v_{n_1,1}}.
\end{aligned}$$

On commence par remarquer qu'une solution de l'équation fonctionnelle (6.154) est nécessairement polarisée sur  $\ker(\mathcal{L}(i_{\mathcal{I}}, \xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_1}))$ . On va donc commencer par considérer le cas  $S \ker(\mathcal{L}(i_{\mathcal{I}}, \xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_1})) = \{0\}$ .

L'équation fonctionnelle (6.154) se réécrit, dans ce cas, sous la forme :

$$u(t, x_1) = S_1^{n_1} g(t + \delta x_1, \kappa x_1),$$

et détermine ainsi de façon unique  $u \in H_p^K$  pour tout terme source  $g$ . C'est pourquoi dans la suite, on supposera que la restriction de  $S$  au sous-espace vectoriel  $\ker(\mathcal{L}(i_{\mathcal{I}}, \xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_1}))$  est inversible.

Dans la suite, on écrira l'équation fonctionnelle (6.154) sous la forme suivante :

$$(I - \mathbb{T})u = G, \quad (6.155)$$

ou l'on a posé :

$$(\mathbb{T}u)(t, x_1) := Su(t + \alpha x_1, \beta x_1), \quad (6.156)$$

$$G(t, x_1) := S_{n_1}g(t + \delta x_1, \kappa x_1). \quad (6.157)$$

Une condition suffisante pour résoudre l'équation fonctionnelle (6.154) dans  $L^2(]-\infty, T] \times \mathbb{R}_+)$  est la suivante :

**Théorème 6.9.3** *Si*

$$|S| < \sqrt{\beta},$$

*alors pour tout  $\gamma > 0$ , pour tout  $G \in L^2_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , l'équation fonctionnelle (6.154) admet une unique solution  $u \in L^2_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , polarisée sur  $\ker(\mathcal{L}(i\mathbb{T}, \xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_1}))$  et vérifiant de plus :*

$$\|u\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)} \leq C \|G\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^2_+)},$$

*où la constante  $C$  est indépendante du paramètre  $\gamma$ .*

*En particulier, pour tout  $T > 0$ , si le terme source  $G \in L^2(\partial\Omega_{2,T})$  et est nul pour les temps négatifs, alors l'équation (6.154) admet une unique solution  $u \in L^2(\partial\Omega_{2,T})$ , nulle sur les temps négatifs, polarisée sur  $\ker(\mathcal{L}(i\mathbb{T}, \xi_1^{n_1}, \xi_2^{n_1}))$ , vérifiant de plus l'estimation :*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})} \leq C_T \|G\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})}.$$

**Démonstration :** Pour résoudre l'équation (6.155) il suffit que l'opérateur  $\mathbb{T}$  soit strictement contractant sur  $L^2_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ . Un simple calcul montre que c'est le cas sous l'hypothèse  $|S| < \sqrt{\beta}$ . □

Pour comprendre le sens de la condition  $|S| < \sqrt{\beta}$ , il est important de remarquer le fait suivant. Si on considère un point sur la face  $\partial\Omega_1$  à distance  $L$  du coin, que l'on suit son trajet le long des bicaractéristiques associées à la boucle, il se retrouve sur la face  $\partial\Omega_1$  à une certaine distance du coin, notée  $L'$ . Reprenant le calcul de la fin du paragraphe 6.6, on remarque que :

$$\beta = \frac{L}{L'}. \quad (6.158)$$

Selon la valeur de  $\beta$  on a donc le comportement suivant :

- ◊ Si  $\beta > 1$ , alors en suivant les courbes bicaractéristiques on se rapproche du coin.
- ◊ Si  $\beta < 1$ , alors en suivant les courbes bicaractéristiques on s'éloigne du coin.
- ◊ Si  $\beta = 1$ , alors le trajet le long des bicaractéristiques est périodique.

Ainsi, la condition  $|S| < \sqrt{\beta}$  impose qu'après un voyage le long des bicaractéristiques associées à la boucle l'énergie de la trace de la solution diminue.

Dans le cas scalaire<sup>8</sup>, c'est-à-dire dans le cas où le rang de  $P_1^{n_1}$  vaut un, ce qui le cas ici par hypothèse de stricte hyperbolicité de l'opérateur  $L(\partial)$ , si  $\beta \neq 1$ , on peut montrer que la condition  $|S| < \sqrt{\beta}$  s'avère aussi être nécessaire pour que l'équation fonctionnelle (6.154) admette une unique solution. L'idée de la preuve est d'utiliser la transformée de Laplace par rapport à la variable temporelle pour se ramener à une situation analogue à celle traitée par Osher dans [Osh74b].

<sup>8</sup>En dehors du cas scalaire, c'est-à-dire lorsque  $S$  est une matrice et non un réel, il semble beaucoup plus difficile de conclure (cf. [Osh74b]).

**Théorème 6.9.4** *Pour une fonction à valeurs réelles  $u$ , et des réels  $\alpha, \beta > 0$ , on considère l'équation fonctionnelle :*

$$u(t, x) - Su(t - \alpha x, \beta x) = g. \quad (6.159)$$

*On suppose que  $S > \sqrt{\beta}$  alors :*

- i) Si  $\beta > 1$ , l'équation (6.159) pour  $g = 0$  admet une solution non nulle.*
- ii) Si  $\beta < 1$ , l'équation (6.159) n'admet a priori aucune solution pour  $g$  quelconque.*

**Démonstration :** On commence par démontrer *i)*, on cherche  $u$  sous la forme  $u(t, x) = H(t)v(t, x)$ , où  $H$  désigne la fonction de Heaviside. Alors appliquant la transformée de Laplace temporelle à l'équation (6.159) on va chercher à résoudre :

$$\hat{v}(\sigma, x) - Se^{\alpha\sigma x}\hat{v}(\sigma, \beta x) = 0, \quad (6.160)$$

où  $\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}\sigma > 0$  est la variable duale de  $t$ .

Comme dans [Osh74b] on pose

$$\hat{v}(\sigma, x) = e^{\frac{\alpha\sigma x}{1-\beta}} x^{-\frac{\ln S}{\ln \beta}},$$

et l'on vérifie aisément que cette fonction vérifie l'équation (6.160). Or  $\text{Re}\left(\frac{\alpha\sigma}{1-\beta}\right) < 0$ , et par hypothèse  $S > \sqrt{\beta}$ , dont on déduit que  $-\frac{\ln S}{\ln \beta} < -\frac{1}{2}$ . Par conséquent,  $\hat{v} \in L^2_x(\mathbb{R}_+)$ .

Cependant,  $\hat{v}$  ne vérifie pas les hypothèses du théorème de Paley-Wiener donc on ne peut pas conclure avec cette fonction. Mais si on pose par exemple,

$$\hat{v}(\sigma, x) = \frac{1}{(1+\sigma)} \hat{v}(\sigma, x),$$

il est clair que  $\hat{v}$  est toujours une solution de (6.160). De plus,

$$\sup_{\gamma > 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} |v(\gamma + i\eta, x)|^2 dx d\eta \leq \sup_{\gamma > 0} \left( \int_{\mathbb{R}_+} x^{-2\frac{\ln S}{\ln \beta}} e^{\frac{2x\alpha\gamma}{1-\beta}} dx \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \leq C.$$

D'après le théorème de Paley-Wiener, il existe donc  $v \in L^2_\gamma(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  dont  $\hat{v}$  est la transformée de Laplace. Ainsi on a construit  $v$  une solution non nulle de (6.159).

Pour démontrer *ii)* comme dans [Osh74b], il suffit de remarquer que si l'on revient à la notation  $\mathbb{T}u = Su(t + \alpha x, \beta x)$ , alors l'adjoint de  $\mathbb{T}$  est donné par :

$$\mathbb{T}^*v = -\frac{S}{\beta}v\left(t - \frac{\alpha}{\beta}x, \frac{1}{\beta}x\right).$$

Donc si  $\beta < 1$ , l'opérateur  $T^*_{\mathbb{T}}$  est dans la situation *i)*, ainsi si  $\frac{S}{\beta} > \frac{1}{\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow S > \sqrt{\beta}$ , l'opérateur  $T^*_{\mathbb{T}}$  n'est pas injectif et par conséquent  $\mathbb{T}$  n'est pas surjectif ce qui conclut la démonstration. □

On a vu lors de la construction du développement BKW que l'inversibilité de l'opérateur  $I - \mathbb{T}$  ne suffisait pas pour conclure que le développement BKW converge bien vers la solution exacte. En effet, pour avoir un résultat de convergence, il faut au minimum construire le premier terme correcteur. On a alors besoin que  $I - \mathbb{T}$  soit inversible de  $H^1_p$  dans  $H^1_p$ . Plus généralement, si on veut un contrôle de l'écart entre le développement BKW et la solution exacte en  $O(\varepsilon^K)$ , il faut que l'opérateur  $I - \mathbb{T}$  soit inversible de  $H^K_p$  dans  $H^K_p$ . Le théorème suivant montre que la solution de l'équation fonctionnelle (6.154) donnée par le théorème 6.9.3 hérite de la régularité  $H^K_p$  du terme source. Il y a deux cas à considérer :

**Théorème 6.9.5** *i) Si  $0 < \beta \leq 1$  et si  $|S| < \sqrt{\beta}$ , alors l'opérateur  $I - \mathbb{T}$  est inversible de  $H_p^\infty$  dans  $H_p^\infty$ .*

*ii) Soit  $K \in \mathbb{N}$ , si  $\beta > 1$  et si  $|S|\beta^{K-\frac{1}{2}} < 1$ , alors l'opérateur  $I - \mathbb{T}$  est inversible de  $H_p^K$  dans  $H_p^K$ .*

**Démonstration :** On pose

$$u(t, x_1) = G(t, x_1) + \sum_{j=1}^{+\infty} S^j S_1^{n_1} g \left( t + X_{\alpha, \beta, \delta}^j x_1, \beta^j \kappa x_1 \right), \quad (6.161)$$

avec

$$X_{\alpha, \beta, \delta}^j := \sum_{k=0}^{j-1} \alpha \beta^k + \beta^j (\alpha + \delta).$$

On peut aisément vérifier que, sous l'hypothèse  $|S| < \sqrt{\beta}$ , la fonction  $u$  définie en (6.161) est une solution formelle de l'équation fonctionnelle (6.154) dans  $L^2(\partial\Omega_{2,T})$ . D'après le théorème 6.9.3, elle est unique.

On montre ensuite que la solution  $u$  définie en (6.161) hérite de la régularité de  $g$ . D'abord, au vu de l'équation (6.154), il est clair que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et indépendamment de la valeur de  $\beta$  :

$$\|\partial_t^n u\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})} \leq C \|\partial_t^n g\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})},$$

il ne reste donc plus qu'à traiter que le cas de la dérivée par rapport à la variable  $x_1$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , un simple calcul donne :

$$\partial_{x_1}^n u = \partial_{x_1}^n G + \sum_{j=1}^{+\infty} S^j S_1^{n_1} \left[ \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left( X_{\alpha, \beta, \delta}^j \right)^l (\beta^j \kappa)^{n-l} \partial_t^{n-l} \partial_{x_1}^l g \right] \left( t + X_{\alpha, \beta, \delta}^j x_1, \beta^j \kappa x_1 \right). \quad (6.162)$$

on en vient maintenant à l'étude de cas selon la valeur du paramètre  $\beta$ .

Si  $\beta \leq 1$ , on majore brutalement les constantes qui sont apparues lors de la dérivation et l'on obtient :

$$\|\partial_{x_1}^n u\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})} \leq \|\partial_{x_1}^n G\| + C_{n, \kappa, \alpha, |S_1^{n_1}|, \delta} \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \frac{|S|}{\sqrt{\beta}} \right)^j \sum_{l=0}^n \|\partial_t^{n-l} \partial_{x_1}^l g\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})},$$

où l'on a fait le changement de variable

$$\begin{bmatrix} s \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{\alpha, \beta, \delta}^j \\ 0 & \kappa \beta^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x_1 \end{bmatrix},$$

pour faire apparaître le terme en  $\sqrt{\beta}$ . Donc sous l'hypothèse  $|S| < \sqrt{\beta}$ , la solution  $u \in H^\infty(\partial\Omega_{2,T})$  définie en (6.161) et on vérifie de plus sur l'équation (6.162) qu'elle est aussi dans  $H_p^\infty$ .

Si  $\beta > 1$ , on majore la série (6.162) par une série de la forme :

$$\|\partial_{x_1}^n u\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})} \leq \|\partial_{x_1}^n G\| + C_{n, \kappa, \alpha, |S_1^{n_1}|, \delta} \sum_{j=1}^{+\infty} \left( |S| \beta^{n-\frac{1}{2}} \right)^j \sum_{l=0}^n \|\partial_t^{n-l} \partial_{x_1}^l g\|_{L^2(\partial\Omega_{2,T})},$$

pour  $0 \leq n \leq K$ , cette série converge bien grâce à l'hypothèse  $|S|\beta^{K-\frac{1}{2}} < 1$ . On montre alors que  $u \in H^K(\partial\Omega_{2,T})$ . Une fois de plus, le caractère plat au coin se vérifie sur l'équation (6.162), on a donc  $u \in H_p^K$ .

□

**Remarque** Comme dans le cas de l'infinité de phases générées au paragraphe 6.6, on peut remarquer que lorsque l'amplitude du terme source,  $g$  est à support "loin" du coin, si on se restreint à construire le développement BKW pour  $t < T < +\infty$  alors le nombre de termes dans la série (6.161) est fini. Ainsi, dans ce cadre l'opérateur  $(I - \mathbb{T})$  est inversible, d'inverse donné par l'équation (6.161), indépendamment de  $\beta$  et de  $S$ .

Le théorème 6.9.5 semble indiquer qu'un phénomène de concentration au coin est plus difficile à gérer qu'un phénomène d'éloignement du coin. En effet, dans le cas d'un phénomène d'éloignement du coin, l'écart entre la solution exacte et le développement BKW sera en  $O(\varepsilon^N)$  avec  $N$  arbitrairement grand, tandis que dans le cas d'une concentration au coin, la condition  $|S|\beta^{K-\frac{1}{2}} < 1$  implique qu'il existe un  $N_0$  maximal tel que l'écart soit en  $O(\varepsilon^{N_0})$ .

On ne prétend pas à l'optimalité du théorème 6.9.5, ainsi, il se peut que dans le cas  $\beta > 1$  l'équation (6.154) admette une unique solution dans  $H_p^\infty$  si  $G \in H_p^\infty$ . Cependant, comme on va le voir dans l'exemple suivant, le théorème 6.9.5 est suffisant pour établir la convergence du développement BKW vers la solution exacte sur l'exemple du sous-paragraphe 6.9.1.

### 6.9.6 Exemples pour lesquels la condition d'inversibilité (6.154) est satisfaite.

#### Retour sur l'exemple du sous-paragraphe 6.9.1.

On applique le théorème 6.9.3 à l'exemple du sous-paragraphe 6.9.1, pour lequel la trace de  $\lambda_1$  vérifie :

$$\lambda_1(t, 0, x_2) = -\frac{\sqrt{5}}{64\sqrt{7}\delta} \left[1 - 3\sqrt{5}\right] \left[\frac{7}{3} - \sqrt{5}\right] \lambda_1\left(t - 27x_2, 0, \frac{35}{2}x_2\right) + G. \quad (6.163)$$

On a déjà mentionné au sous-paragraphe 6.9.1 que le paramètre réel  $\delta \neq 0$  gouverne la dissipativité sur la face  $\partial\Omega_2$  de la façon suivante :

- ◊ Si  $|\delta| > 1$ , alors la condition de bord sur la face  $\partial\Omega_2$  est strictement dissipative.
- ◊ Si  $|\delta| = 1$ , alors la condition de bord sur la face  $\partial\Omega_2$  est maximale dissipative.
- ◊ Si  $|\delta| < 1$ , alors la condition de bord sur la face  $\partial\Omega_2$  n'est pas dissipative mais vérifie néanmoins la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme.

La condition de bord sur la face  $\partial\Omega_1$  est elle strictement dissipative indépendamment de la valeur de  $\delta$ .

D'après le théorème 6.9.3, si

$$|\delta| > \frac{1}{32 \cdot \sqrt{5} \cdot 7^{3/2}} (-1 + 3\sqrt{5}) \left(\frac{7}{3} - \sqrt{5}\right) := \delta_0 \approx 4.10^{-4}$$

alors l'équation fonctionnelle (6.163) admet une unique solution. Et l'on voit donc que l'on peut construire le premier terme du développement BKW pour plus de paramètres que ceux assurant la stricte dissipativité sur la face  $\partial\Omega_2$ .

A contrario, si

$$0 < |\delta| < \delta_0$$

on est alors dans un cadre non dissipatif et d'après le théorème 6.9.4 l'équation (6.163) admet une solution non nulle pour  $G = 0$  donc on n'est pas en mesure de construire le premier terme du développement BKW de manière unique. Cela semble indiquer que le problème à coin (6.96) n'est pas bien posé lorsque le paramètre  $|\delta| \in ]0, \delta_0[$ , c'est-à-dire lorsque la condition de bord sur la face  $\partial\Omega_2$  dissipe trop peu d'énergie. Dans ce cas de figure, cet exemple montre qu'imposer la condition



où les polynômes  $p_1$  et  $p_2$  sont homogènes de degré deux. La variété contient donc la boucle  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  mais ne peut représenter la section à  $\tau = 1$  de la variété caractéristique d'un système strictement hyperbolique. En effet, les deux ellipses composant cette variété s'intersectent en quatre points notés  $Q_1, Q_2, Q_3$  et  $Q_4$ . Cependant, on peut montrer que cette variété est la variété caractéristique d'un système géométriquement régulier qui s'écrit sous la forme<sup>9</sup> :

$$L(\partial) = \partial_t + A_1 \partial_1 + A_2 \partial_2, \quad (6.164)$$

avec

$$A_1 := \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{b} \end{bmatrix},$$

où les paramètres  $a_1, \tilde{a}_1 < 0$  et  $b, \tilde{b}, a_2, \tilde{a}_2 > 0$ . Plus précisément, l'équation  $p_1(1, \xi_1, \xi_2) = 0$  qui caractérise l'ellipse  $\mathcal{E}_1$  s'écrit sous la forme

$$\alpha \xi_1^2 + \beta \xi_2^2 - \gamma \xi_1 \xi_2 - 1 = 0,$$

où les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  sont positifs et vérifient  $\gamma^2 - 4\alpha\beta < 0$ . On pose alors

$$\begin{cases} a_2 = \pm \frac{\sqrt{4\alpha\beta - \gamma^2}}{2\sqrt{\beta}}, \\ b = \pm \sqrt{\beta}, \\ a_1 = \mp \frac{\gamma}{2\sqrt{\beta}}, \end{cases}$$

où le paramètre  $a_2$  est bien défini en raison de l'hypothèse d'ellipticité. On fait ensuite un choix analogue pour paramétriser l'ellipse  $\mathcal{E}_2$ .

Une fois l'opérateur  $L(\partial)$  construit on impose les conditions de bord suivantes :

$$B_1 u|_{x_1=0} := g^\varepsilon, \quad B_2 u|_{x_2=0} := 0,$$

où les matrices  $B_1$  et  $B_2$  sont définies par

$$B_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},^{10}$$

$\delta$  étant un paramètre réel non nul.

On peut commencer par remarquer que la condition de bord

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left( \text{resp } \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est strictement dissipative pour la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ). En particulier, elles vérifient la condition de Kreiss-Lopatinskiï uniforme. Utilisant le fait que les équations définissant l'opérateur (6.164)

<sup>9</sup>On utilise ici un système qui diffère un peu de celui proposé dans [SS75], et que l'on trouve plus simple. On reviendra à la fin de ce sous-paragraphe sur la paramétrisation qui est donnée dans [SS75].

<sup>10</sup>La condition de bord sur  $\partial\Omega_1$  est exactement la même que celle imposée dans [SS75]. La condition de bord sur  $\partial\Omega_2$  imposée dans [SS75] était donnée par la matrice

$$B_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On expliquera dans la suite de cette démonstration pourquoi on a changé cette condition.



sont découplées, on peut écrire les sous-espaces stables  $E_1^s$  et  $E_2^s$  sous la forme :

$$E_1^s(\tau, \xi_2) := \text{vect} \left\{ \begin{bmatrix} q_1 \\ r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{q}_1 \\ \tilde{r}_1 \end{bmatrix} \right\} \text{ et } E_2^s(\tau, \xi_1) := \text{vect} \left\{ \begin{bmatrix} q_2 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{r}_2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ainsi, la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour la condition de bord  $\tilde{B}_1$  (resp.  $\tilde{B}_2$ ) sur la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ) équivaut à :

$$\begin{vmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r}_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -q_1 \tilde{q}_1 \neq 0, \quad \left( \text{resp} \begin{vmatrix} q_2 & 0 & 1 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r}_2 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{r}_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -r_2 \tilde{r}_2 \neq 0 \right)$$

La condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour la condition de bord  $B_1$  sur la face  $\partial\Omega_1$  (resp.  $B_2$  sur la face  $\partial\Omega_2$ ) est effectivement vérifiée car le déterminant :

$$\begin{vmatrix} q_1 & 0 & 0 & \delta \\ r_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r}_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -q_1 \tilde{q}_1 \neq 0, \quad \left( \text{resp} \begin{vmatrix} q_2 & 0 & 1 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{r}_2 & \delta & 0 \end{vmatrix} = -r_2 \tilde{r}_2 \neq 0 \right).$$

On peut de plus vérifier que les conditions de bord  $B_1$  et  $B_2$  sont strictement dissipatives pour  $\delta$  assez petit (plus précisément la condition de bord sur la face  $\partial\Omega_1$  l'est pour  $|\delta| < \sqrt{\frac{a_1 \tilde{a}_1}{a_1^2 + a_2^2}}$ , celle sur la face  $\partial\Omega_2$ , l'est pour  $|\delta| < \sqrt{\frac{b}{b}}$ ). Maintenant que l'on a fixé les conditions de bord, on veut étudier la condition d'inversibilité  $|S| < \sqrt{\beta}$  que l'on obtient lorsque l'on s'intéresse au développement BKW du système <sup>11</sup> :

$$\begin{cases} L(\partial)u^\varepsilon = 0, \\ B_1 u^\varepsilon|_{x_1=0} = g^\varepsilon, \\ B_2 u^\varepsilon|_{x_2=0} = 0, \\ u^\varepsilon|_{t \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (6.165)$$

où le terme source  $g^\varepsilon$  s'écrit sous la forme :

$$g^\varepsilon = e^{\frac{i}{\varepsilon}(t + P_{1,2}x_2)} g,$$

avec  $g \in H_p^\infty$ , nulle pour les temps négatifs et où  $P_{1,2}$  désigne l'ordonnée du point  $P_1$ .

Le facteur  $\beta$  qui est le produit des pentes des vitesses de groupe dépend uniquement de  $L(\partial)$ . En particulier, il est indépendant de  $\delta$  et on peut explicitement le calculer en fonction des coefficients des matrices  $A_1$  et  $A_2$ . On en vient maintenant à calculer le terme  $S$ . On rappelle que ce dernier est donné par (on fait ici l'amalgame entre les fréquences et les indices pour les quatre éléments de la boucle) :

$$S := S_1^{P_1} B_1 S_2^{P_2} B_2 S_1^{P_3} B_1 S_2^{P_4} B_2.$$

<sup>11</sup>On ne cherche pas ici à déterminer l'intégralité du développement BKW car en raison du phénomène de concentration des phases au voisinage des points d'intersection des deux ellipses (cf. sous-paragraphe 6.9.1), le développement BKW contiendra ici un nombre infini de phases.

On note

$$\ker(\mathcal{L}(1, P_1)) = \text{vect } e_1, \quad e_1 := \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et pour } i \in \{2, 3, 4\}, \quad \ker(\mathcal{L}(1, P_i)) = \text{vect } e_i, \quad e_i := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_i \\ q_i \end{bmatrix},$$

Encore une fois, utilisant le caractère découplé de l'opérateur  $L(\partial)$  le sous-espace stable  $E_2^s(i, P_{4,1})$  s'écrit sous la forme  $E_2^s(i, P_{4,1}) = \text{vect} \{(0, 0, p_4, q_4), (\tilde{p}, \tilde{q}, 0, 0)\}$ . Ainsi, l'inverse  $\phi_2(i, P_{4,1})$  qui apparaît dans le terme  $S_2^{P_4}$  est donnée par :

$$\phi_2(i, P_{4,1}) := \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}}{q} & 0 \\ 1 & 0 \\ \delta \frac{p_4 \tilde{p}}{q_4 q} & \frac{p_4}{q_4} \\ \delta \frac{\tilde{p}}{q} & 1 \end{bmatrix},$$

dont on déduit que

$$S_2^{P_4} B_2 \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{P}^{P_4} \left( \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}}{q} q_1 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_4}{q_4} \left( q_1 \frac{\tilde{p}}{q} - p_1 \right) \\ q_1 \frac{\tilde{p}}{q} - p_1 \end{bmatrix} \right) := c \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_4 \\ q_4 \end{bmatrix},$$

où  $c$  est une constante (explicitement calculable mais dont la valeur est peu intéressante pour notre propos) dépendant uniquement du projecteur  $\mathbb{P}^{P_4}$  sur  $\ker(\mathcal{L}(\mathcal{T}, P_4))$ <sup>12</sup>. On insiste toutefois sur le fait que  $c$  est non nulle. En effet, la seule possibilité pour que  $c$  soit nulle est que les rapports  $\frac{\tilde{p}}{q}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  soient égaux. En d'autres termes, si on note  $\tilde{E}_1^s$  et  $\tilde{E}_2^s$ , les sous-espaces stables associés au système dont la section de la variété caractéristique à  $\tau = 1$  est donnée par  $p_1(1, \xi_1, \xi_2) = 0$ , on a alors  $\tilde{E}_1^s(i, P_{1,2}) = \tilde{E}_2^s(i, P_{1,2})$ , ce qui équivaut à dire que la fréquence  $(i, P_{1,2})$  est une fréquence de glancing pour l'une des faces.

En réitérant exactement le même raisonnement pour les autres termes composant  $S$ , on montre facilement que :

$$S_1^{P_3} B_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_4 \\ q_4 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad S_2^{P_2} B_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_2 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \text{et enfin } S_1^{P_1} B_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = c \delta \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la condition d'inversibilité (6.154) se reformule sous la forme

$$c\delta^2 < \sqrt{\beta}, \quad c > 0.$$

---

<sup>12</sup>Si on avait choisi de travailler avec la condition de bord strictement dissipative  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix}$  comme dans [SS75], on peut montrer que le terme

$$S_2^{P_4} B_2 \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = q_1 \mathbb{P}^{P_4} \left( \begin{bmatrix} \frac{\tilde{p}}{q} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Dont on déduit que  $S$  est nul. Par conséquent, la condition d'inversibilité est trivialement satisfaite et on ne peut pas être en présence du phénomène d'explosion annoncé dans [SS75].

Ainsi, cette condition n'est pas satisfaite pour  $\delta$  grand. On remarque au passage les deux choses suivantes. D'abord, la vitesse "d'explosion" que l'on obtient ici est de l'ordre de  $\delta^2$  et diffère donc du  $\delta^4$  annoncé dans [SS75]. Ensuite, on peut remarquer que pour  $|\delta|$  petit, la condition d'inversibilité est satisfaite et l'on se trouve dans un cadre strictement dissipatif sur chaque face.

On en vient maintenant à la construction du système strictement hyperbolique dont la section de la variété caractéristique contient une boucle. La méthode de Sarason et Smoller est la suivante. On part du système géométriquement régulier (6.164) que l'on perturbe légèrement selon un petit paramètre  $\varepsilon$  de manière à "séparer" les deux ellipses au voisinage des points d'intersection.

Dans les notations de [SS75], le système (6.164) a pour symbole en espace :

$$\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 := \begin{bmatrix} f & g & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & G \\ 0 & 0 & G & H \end{bmatrix}, \quad (6.166)$$

où les termes  $f, g, h, F, G, H$  sont linéaires dans les variables  $\xi_1$  et  $\xi_2$  et sont choisis de manière à satisfaire certaines propriétés de renormalisation (cf. [SS75] proposition 9.1). Pour rendre ce système strictement hyperbolique, la perturbation appliquée est la suivante :

$$L^\varepsilon(\partial) := \partial_t + A_1^\varepsilon \partial_1 + A_2^\varepsilon \partial_2, \quad (6.167)$$

où les matrices perturbées  $A_1^\varepsilon$  et  $A_2^\varepsilon$  vérifient :

$$\xi_1 A_1^\varepsilon + \xi_2 A_2^\varepsilon := \begin{bmatrix} f & g & 0 & 0 \\ g & h & \varepsilon \vartheta & 0 \\ 0 & -\varepsilon \vartheta & F & G \\ 0 & 0 & G & H \end{bmatrix},$$

les termes  $\vartheta$  qui portent la perturbation étant linéaires dans les variables  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , et sont choisis de manière à ce que leurs signes au voisinage d'un point d'intersection  $Q_i$  "séparent" les ellipses (cf. [SS75] paragraphe 7). La section de la variété caractéristique du système perturbé (6.167) s'écrit sous la forme :

$$p_1 p_2 + \varepsilon^2 f H \vartheta^2 = 0, \quad (6.168)$$

et est représentée à la figure 6.9.6 <sup>13</sup>. Le premier résultat de [SS75] est le suivant :

**Théorème 6.9.6** ([SS75] paragraphe 7) *Pour  $\varepsilon$  assez petit, l'opérateur (6.167) est strictement hyperbolique. De plus, il admet une boucle, notée  $(P_1^\varepsilon, P_2^\varepsilon, P_3^\varepsilon, P_4^\varepsilon)$ .*

D'après l'équation (6.168), les vitesses de groupes,  $v_i^\varepsilon$ , calculées aux points  $P_i^\varepsilon$  sont de la forme

$$v_i^\varepsilon = v_i + O(\varepsilon), \quad (6.169)$$

où  $v_i$  est la vitesse de groupe au point  $P_i$ . De même, l'équation (6.167) montrent que les sous-espaces vectoriels  $\ker(\mathcal{L}(\underline{\tau}, P_i^\varepsilon))$  sont engendrés par les vecteurs

$$w_i^\varepsilon = w_i + O(\varepsilon), \quad (6.170)$$

où  $w_i$  est un vecteur générateur du sous-espace  $\ker(\mathcal{L}(\underline{\tau}, P_i))$ .

Le second résultat de [SS75] est le suivant :

<sup>13</sup>Dans la figure 6.9.6, les "angles" qui apparaissent au voisinage des anciens points d'intersection proviennent d'un manque de précision du logiciel graphique utilisé et ne sont pas pertinents.

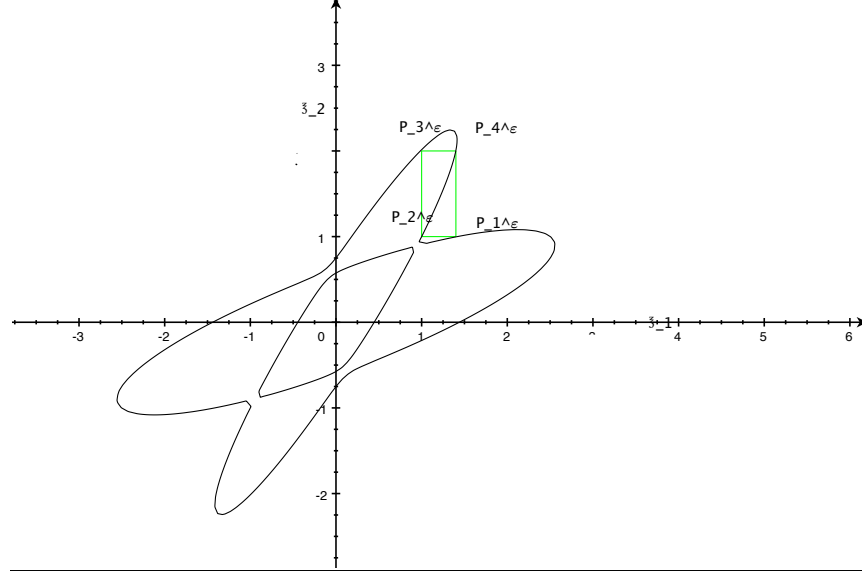


Figure 6.20: Section de la variété caractéristique du système perturbé.

**Théorème 6.9.7** ([SS75] paragraphe 9) Pour tout  $\delta > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, le problème à coin :

$$\begin{cases} L^\varepsilon(\partial)u = f, \\ B_1 u|_{x_1=0} = g_1, \\ B_2 u|_{x_2=0} = g_2, \\ u|_{t \leq 0} = 0 \end{cases} \quad (6.171)$$

où les matrices de bord  $B_1$  et  $B_2$  sont données par :

$$B_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chaque face de  $\partial\Omega$ .

Pour  $\delta > 0$ , fixé, on prend donc  $\varepsilon$  tel que le système (6.171) soit strictement hyperbolique avec la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur chaque face. On prend ensuite un terme source fortement oscillant sur la face  $\partial\Omega_1$  dans (6.171) de la forme : pour  $0 < \epsilon \ll 1$ ,

$$g_1^\epsilon := e^{\frac{i}{\epsilon}(\tau t + P_{1,2}^\epsilon x_2)} g_1,$$

et on pose  $f \equiv 0$  et  $g_2 \equiv 0$ .

Reprenant le calcul effectué à l'exemple du sous-paragraphe 6.9.1 et au sous-paragraphe 6.9.3, pour construire les amplitudes liées aux points  $(P_1^\epsilon, P_2^\epsilon, P_3^\epsilon, P_4^\epsilon)$  on est amené à imposer la condition  $|S^\epsilon| < \sqrt{\beta^\epsilon}$  avec :

$$\begin{aligned} S^\epsilon &:= S_1^\epsilon B_1 S_2^\epsilon B_2 S_3^\epsilon B_1 S_4^\epsilon B_2, \\ \beta^\epsilon &:= \frac{v_{4,1}^\epsilon v_{3,2}^\epsilon v_{2,1}^\epsilon v_{1,2}^\epsilon}{v_{4,2}^\epsilon v_{3,1}^\epsilon v_{2,2}^\epsilon v_{1,1}^\epsilon}, \end{aligned}$$

où  $S_i^\epsilon := \mathbb{P}_i^\epsilon \phi^{i,\epsilon}$ ,  $\mathbb{P}_i$  étant le projecteur sur  $\ker(\mathcal{L}(\mathcal{T}, P_i^\epsilon))$  et  $\phi^{i,\epsilon}$  l'inverse donnée par la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme qui est bien définie par choix de  $\varepsilon$ .

On peut réitérer exactement les mêmes calculs qu'au début de ce sous-paragraphe pour le système non perturbé et en utilisant les équations (6.169) et (6.170) on montre alors que la condition  $|S^\varepsilon| < \sqrt{\beta^\varepsilon}$  est de la forme :

$$|S| + O(\varepsilon) < \sqrt{\beta} + O(\varepsilon) \iff c\delta^2 + O(\varepsilon) < \sqrt{\beta} + O(\varepsilon).$$

Donc quitte à restreindre encore la valeur du paramètre de perturbation  $\varepsilon$  le système strictement hyperbolique (6.171) vérifie la condition d'inversibilité si et seulement si son homologue géométriquement régulier la vérifie.

### 6.9.7 Modifications apportables à la démonstration du théorème 6.9.2.

Dans ce dernier sous-paragraphe, on donne quelques éléments de démonstration pour les constructions de développements BKW lorsque l'on n'est pas exactement sous les mêmes hypothèses que le théorème 6.9.2. On mentionnera par exemple ici les constructions de développements BKW pour des problèmes sans boucle, pour des problèmes dont le terme source n'allume pas un élément de la boucle et enfin pour des problèmes qui admettent (éventuellement) plusieurs boucles qui ne sont pas autointeragissantes.

#### Développement BKW pour $N > 2$ en l'absence de boucle.

Si la section de la variété caractéristique n'admet pas de boucle, le théorème 6.9.2 s'applique encore et sa démonstration se trouve, sans surprise, être simplifiée.

En effet, dans cas, on peut remarquer que l'ensemble  $\mathcal{I}$  se partitionne en

$$\mathcal{I} = \cup_{i_0 \in \mathcal{I}_0} \left\{ i \in \mathcal{I} \setminus i_0 \xrightarrow[V]{} i \right\},$$

où l'on rappelle que les indices de  $\mathcal{I}_0$  sont les indices générées par le terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  (voir proposition 6.9.2). En l'absence de boucle, on remarque facilement que chacun des ensembles constituant cette partition est un arbre (ou de façon équivalente, un ensemble partiellement ordonné par la relation  $\cdot \xrightarrow[V]{} \cdot$ ). La méthode de résolution est la suivante, on commence par déterminer tous les éléments de  $\mathcal{I}_0$ , ceci est réalisable car en l'absence de boucle, par minimalité de l'ensemble des fréquences pour l'inclusion, on sait que pour  $i \in \mathcal{I}_0$ ,  $\Phi(i) \cap \mathcal{I}_{se} = \emptyset$ . On est alors dans le même cadre que celui des exemples pour  $N = 2$ .

Ensuite, pour déterminer l'amplitude associée à un indice quelconque, il suffit de remonter la branche dont cet indice est issu. Plus précisément pour un indice  $i \in \mathcal{I}$ , on utilise le fait que  $i_0 \xrightarrow[V]{} i$  pour un certain  $i_0 \in \mathcal{I}_0$ , et comme dans le sous-paragraphe 6.9.3 pour construire l'amplitude  $i$ , on détermine d'abord toutes les amplitude  $u_{0,\ell_l}$  où  $(\ell_l)_l$  est la suite reliant  $i$  à  $i_0$  donnée par la relation  $i_0 \xrightarrow[V]{} i$ .

#### Développement BKW lorsque le terme source "n'allume" pas un élément de la boucle.

Dans la démonstration du théorème 6.9.2, pour simplifier les choses, on avait supposé que le terme source sur la face  $\partial\Omega_1$  était de la forme :

$$g^\varepsilon(t, x_2) := e^{\frac{i}{\varepsilon}(\tau t + \xi_2 x_2)} g(t, x_2),$$

et que l'un des indices entrant-sortant de la boucle était associé à une fréquence de la forme :  $f_{n_1} = (\tau, \xi_1, \xi_2)$ . Cette hypothèse n'est bien sûr pas nécessaire. En effet, si on choisit un autre

terme source et que l'on applique le procédé de génération des phases décrit au sous-paragraphe 6.8, l'ensemble des fréquences  $\tilde{\mathcal{F}}$  que l'on va obtenir vérifiera l'une des alternatives suivantes :

- i)  $\tilde{\mathcal{F}}$  ne contient pas de boucle.
- ii)  $\tilde{\mathcal{F}}$  contient la même boucle que celle de  $\mathcal{F}$ .
- iii)  $\tilde{\mathcal{F}}$  contient une boucle différente de celle de  $\mathcal{F}$ .
- iv)  $\tilde{\mathcal{F}}$  ne vérifie pas les hypothèses du théorème 6.9.2 (par exemple, il contient une fréquence de glancing, ou plusieurs boucles d'autointeractions, ou encore une infinité de phases sont générées).

On peut toujours conclure si l'ensemble  $\tilde{\mathcal{F}}$  ne vérifie pas la situation *iv*) (pour laquelle on espère toutefois pouvoir donner des éléments de réponse à l'avenir). En effet, la situation *i*) est résolue dans le sous-paragraphe précédent et dans les cas *ii*) et *iii*), il suffit de refaire la même construction que celle décrite dans le paragraphe 6.9. La seule différence étant qu'a priori, les éléments de la boucle seront allumés après un certain nombre de rebonds sur les faces du domaine. Il faut donc avant tout déterminer les amplitudes associées à ces rebonds (qui initialement ne voit pas la boucle et on peut se ramener au cas *i*)), puis utiliser la connaissance de l'amplitude qui viendra allumer la boucle (et qui jouera donc le rôle du terme source  $g^e$  dans la condition d'inversibilité (6.154)) pour déterminer les amplitudes liées à la boucle. On conclut ensuite exactement comme lorsque le terme source allumait directement la boucle.

Il est toutefois intéressant de remarquer que même une infime perturbation du terme source peut, de façon assez générique, faire passer dans les situations *i*), *ii*) ou *iii*) (on peut se convaincre que la transition vers la situation *i*) se déroule dans l'exemple 6.9.1, si la perturbation du terme source est faite dans la variable  $\xi_1$  uniquement). Ce qui laisse à penser que les développements BKW des problèmes à coin sont fortement dépendants du terme source choisi. Plus particulièrement, la condition d'inversibilité (6.154) semble très "instable" puisque dans le cas d'une transition vers *i*) elle disparaît, et dans le cas d'une transition vers *iii*) elle est remplacée par une nouvelle version de cette condition qui n'aura a priori aucun lien de causalité avec l'ancienne version. En effet a priori, la nouvelle boucle peut être loin de l'ancienne. Seule la transition vers *ii*) garde inchangée la condition (6.154) et se contente d'augmenter le nombre de phases dans le développement BKW.

Cette "instabilité" semble plus importante que dans le cas des développements BKW pour le problème aux limites standard, pour lequel, une petite modification du terme source pouvait, à condition que l'on construise le développement BKW pour une fréquence de glancing, au pire changer la nature des modes sur lesquels la version micro-locale de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme était à imposer, mais ne la faisait toutefois jamais disparaître.

### Affaiblissement de l'hypothèse d'unicité de la boucle.

Dans la démonstration du théorème 6.9.2, on a exclu l'appartenance de tous les types de boucle. C'est-à-dire aussi bien les boucles qui produisent un phénomène d'autointeraction entre les phases, que celles qui ne produisent pas ce genre de phénomène. Cette version forte de l'hypothèse d'unicité de la boucle a été motivée par les deux faits suivants : en premier lieu, elle simplifie grandement la rédaction de la démonstration. D'autre part, on n'a pas réussi (du moins pour le moment) à construire des exemples explicites où cohabitent un grand nombre de boucles. On pense toutefois que de tels exemples doivent exister pour  $N$  grand.

Cependant, on peut affaiblir l'hypothèse d'unicité de la boucle en une hypothèse d'unicité de la boucle d'autointeraction, permettant ainsi d'inclure des boucles ne générant pas ce genre de phénomène (et par conséquent, pour lesquelles on n'a pas besoin d'ajouter une nouvelle condition d'inversibilité de type (6.129)). En effet, les deux points de la preuve qui utilisaient l'hypothèse

forte d'unicité de la boucle sont les suivants, d'une part au sous-paragraphe 6.9.3 pour donner une structure globale arborée à l'ensemble des indices et d'autre part au sous-paragraphe 6.9.3, lors de l'étude locale des arbres.

On va voir comment on peut modifier les arguments utilisés dans ces deux sous-paragraphe pour affaiblir l'hypothèse d'unicité de la boucle. Par exemple, concernant la structure globale décrite au paragraphe 6.9.3, la construction de cette dernière n'utilise en rien l'hypothèse d'unicité de la boucle. Cette hypothèse étant uniquement utilisée pour établir le caractère de partition de cette structure. On peut donc définir la même structure et on suppose que deux arbres  $C_{\underline{c}}$  et  $D_{\underline{d}}$  s'intersectent en un point  $\underline{i}$  et on va montrer que l'on peut toujours déterminer l'amplitude associée à l'indice  $\underline{i}$ .

Par hypothèse,  $\underline{c} \xrightarrow{H} \underline{i}$  et  $\underline{d} \xrightarrow{V} \underline{i}$ . On note  $p$  (resp.  $p'$ ) la longueur d'une des suites  $\ell$  (resp.  $\ell'$ ) reliant  $\underline{i}$  à  $\underline{c}$  (resp.  $\underline{d}$ ). On sépare ensuite les cas suivants<sup>14</sup> :

$$\diamond p, p' \in 2\mathbb{N}.$$

Alors d'après la définition 6.9.4,  $\underline{i} \in \Phi(\ell_p)$ ,  $\ell_p \in \mathcal{I}_{se}$  et  $\underline{i} \in \Psi(\ell'_p)$ ,  $\ell'_p \in \mathcal{I}_{es}$ . Par conséquent,  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{os}$ . On doit ensuite séparer les cas suivants :

si  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{es}$  (resp  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{se}$ ) alors pour construire  $u_{0,\underline{i}}$ , il suffit de construire les amplitudes associées aux indices de la suite  $\ell$  (resp.  $\ell'$ ), la suite  $\ell'$  (resp.  $\ell$ ) n'ayant alors aucune influence sur  $u_{0,\underline{i}}$ .

Si toutefois,  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{ee}$ , il faut construire les amplitudes liées aux indices des suites  $\ell$  et  $\ell'$  (ce qui ne pose toutefois pas de problème) avant de pouvoir construire  $u_{0,\underline{i}}$ . Cette situation correspond à une phase entrante-entrante qui est générée deux fois, une fois suite à un rebond sur la face  $\partial\Omega_1$  et une fois suite à un rebond sur la face  $\partial\Omega_2$ .

$$\diamond p \in 2\mathbb{N}, p' \in 2\mathbb{N} + 1.$$

Réitérant les mêmes arguments et sous les mêmes notations, on montre que si  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{se} \cup \mathcal{I}_{ee} \cup \mathcal{I}_{ev2}$ , alors il faut déterminer les amplitudes liées aux suites  $\ell$  et  $\ell'$  avant de déterminer l'amplitude  $u_{0,\underline{i}}$ . Le cas  $\ell, \ell' \in 2\mathbb{N} + 1$  se traite par les mêmes arguments.

On insiste bien sur le fait la détermination de plusieurs "suites d'amplitudes" n'est pas la seule opération qu'il faudra effectuer pour déterminer l'amplitude  $u_{0,\underline{i}}$ . En effet, si on reprend le cas  $p, p' \in 2\mathbb{N}$  et  $\underline{i} \in \mathcal{I}_{ee}$ , sans l'hypothèse d'unicité de la boucle, il se peut que l'ensemble  $\Phi(\underline{i})$  contienne un élément de  $\mathcal{I}_{se}$  autre que  $k_p$  et il faudra déterminer ce dernier en déterminant toutes les amplitudes de sa branche le reliant à un voisin direct de la boucle avant de déterminer l'amplitude  $u_{0,\underline{i}}$ .

Le cas des boucles non auointeragissantes dont les éléments sont inclus dans l'un des arbres se traite de façon similaire. On pense que ces arguments permettent de se convaincre de la non-nécessité de l'hypothèse forte d'unicité de la boucle pour démontrer le théorème 6.9.2. Mais cette hypothèse est toutefois confortable vu qu'elle permet d'éviter de très lourdes études de cas.

On conclut ce sous-paragraphe par ces deux schémas qui illustrent un exemple de boucle de non-autointeraction ainsi que le trajet de bicaractéristiques associées.

<sup>14</sup>On peut remarquer ici que s'il existe deux suites de type  $H$  reliant  $\underline{c}$  à  $\underline{i}$  telles que les longueurs ne sont pas de même parité, alors l'arbre  $C_{\underline{c}}$  contient une boucle d'autointeraction. Donc sous l'hypothèse d'unicité de la boucle d'autointeraction, l'étude de cas selon la parité de la longueur a un sens.

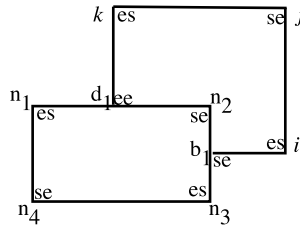


Figure 6.21: Un exemple de variété caractéristique avec une boucle d'autointeraction et une boucle de non-autointeraction.

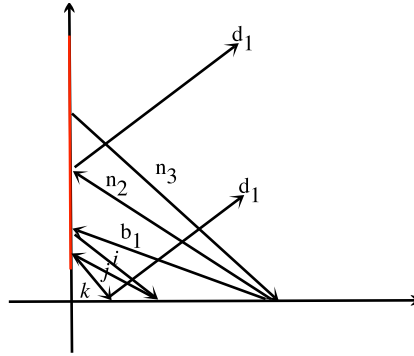


Figure 6.22: Allure des bicaracteristiques associées à une telle configuration.

## 6.10 Résumé et perspectives.

Dans tout ce qui précède on a donné des exemples de construction de développements BKW pour des problèmes hyperboliques posés dans un quart d'espace. Ces derniers ont permis de mettre en évidence les phénomènes suivants :

- ◊ Les phases générées par réflexions sur les faces du bord peuvent être plus nombreuses que dans le cas du problème aux limites standard. (cf paragraphe 6.5)
- ◊ Le nombre de phases générées par réflexions sur les faces du bord peut même se trouver être infini, et ceci même si on se place dans un cadre à coefficients constants avec seulement deux équations. De plus, l'exemple du paragraphe 6.6 met en évidence le phénomène attendu de concentration des rayons au coin.

Dans le paragraphe 6.9, on a démontré un résultat général de construction rigoureuse du développement BKW dans le cas où il est possible d'avoir un phénomène d'autointeraction entre différentes phases. Sous l'hypothèse de finitude du nombre de phases générées par rebonds, on donne aussi des conditions sous lesquels le développement BKW est une bonne approximation de la solution exacte du problème (6.95) (sous l'hypothèse selon laquelle le problème est fortement bien posé (6.95)). La détermination du développement BKW passe alors une certaine condition d'inversibilité (hypothèse 6.9.3). On voit ainsi apparaître dans le développement BKW une séquence de propagation à vitesses de groupe fixées qui se répète *ad vitam eternam*.

A l'avenir, on pense qu'il serait assez intéressant de travailler sur les points suivants.

En pratique, il semble très difficile de vérifier "à la main" l'hypothèse de finitude du nombre de phases générées par réflexions sur le bord, quand la taille  $N$  du système devient grande. Ainsi, si l'on veut appliquer effectivement le théorème 6.9.2, il semble qu'il faille ou bien en démontrer un



analogue sans l'hypothèse de finitude du nombre de phases ou bien trouver une condition générale sur la géométrie de la variété caractéristique qui assure que le nombre de phases générées est fini. La solution revenant à se passer de l'hypothèse de finitude du nombre de phases serait la plus satisfaisante. Toutefois comme on l'a vu au paragraphe 6.6, donner un sens au développement BKW lorsque le nombre de phases est infini n'est pas immédiat. Utiliser le caractère fortement oscillant du développement BKW pourrait être une solution pour rendre le domaine de convergence du développement BKW optimal. On s'attend à ce que le domaine de convergence optimal soit donné par une condition qui impose que les matrices de bord  $B_1$  et  $B_2$  "dissipent" suffisamment d'énergie lors de l'infinité de rebonds. On pense aussi que cette condition doit être impliquée par la condition d'Osher.

De façon plus anecdotique, il pourrait aussi être intéressant d'ôter l'hypothèse d'unicité de la boucle et donc de considérer des problèmes à coin dont la variété caractéristique contient plusieurs boucles. On a déjà mentionné au sous-paragraphe 6.9.7 qu'ajouter des boucles qui ne sont pas autointeragissantes ne devrait pas poser de problème mais complique l'écriture de la démonstration du théorème 6.9.2. Ajouter d'autre boucles autointeragissantes semble aussi possible mais il faut toutefois faire attention à la position relative de ces boucles les unes par rapport aux autres.

La preuve du théorème 6.9.2 utilise de façon non triviale le fait que l'ensemble des fréquences obtenues par réflexions ne contient aucune fréquence "glancing". Il serait donc intéressant d'en inclure dans le développement BKW en s'inspirant des travaux de Williams (voir [Wil96] et [Wil00]). En effet, d'un point de vue construction du développement BKW, si on part d'une fréquence quelconque, rien n'assure que lorsque l'on applique le principe de génération des phases on ne tombe pas après un certain nombre de rebonds sur une fréquence de "glancing".

D'un point de vue plus semblable à celui qui a été suivi dans ce manuscrit, il serait intéressant de voir si une nouvelle équation d'amplitude apparaît pour construire les amplitudes liées aux modes de glancing. Cette nouvelle équation (si elle existe) pourrait alors nous aider à mieux comprendre la condition d'Osher et les opérateurs  $T_{1 \rightarrow 2}(\zeta)$  et  $T_{2 \rightarrow 1}(\zeta)$  du chapitre 5.

Un autre sujet d'étude, qui rejoint le but du précédent, serait de s'intéresser plus en profondeur à la condition d'inversibilité 6.9.3. On aimerait comprendre les liens qui existent entre cette condition et, d'une part, la nature dissipative des conditions de bords, d'autre part, la condition au coin d'Osher. Deux conjectures que l'on pense raisonnables sont les suivantes :

◊ Si les conditions de bords sont strictement dissipatives alors la condition d'inversibilité de l'hypothèse 6.9.3 est automatiquement satisfaite.

◊ La condition d'inversibilité de l'hypothèse 6.9.3 est une version "micro-localisée" de la condition au coin d'Osher. En particulier, si la condition au coin d'Osher est satisfaite alors la condition d'inversibilité 6.9.3 l'est aussi.

Enfin, un dernier point que l'on pense intéressant à étudier, et qui "ferait se rejoindre l'alpha et l'oméga" de cette thèse, et permettrait ainsi de "boucler la boucle", serait de construire des développements BKW pour des problèmes à coin lorsque la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère sur l'une des phases du domaine.

Dans le cas d'une dégénérescence sur un mode elliptique, que l'on soit dans la zone elliptique ou dans la zone elliptico-hyperbolique, on ne s'attend pas à une situation plus riche que dans le cas du problème aux limites.

Pour une dégénérescence sur une fréquence hyperbolique) qui n'est pas un élément de la boucle, il ne semble pas non plus que la situation soit plus riche dans le cas général. On peut tout de même noter que certains problèmes à coins dont les phases obtenues par rebonds successifs (d'un même paquet d'ondes) sur les faces du domaine contiennent  $N_0 > 1$  fréquences de dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, devraient contenir dans leur développement BKW

un terme en  $\varepsilon^{-N_0}$ . On perdrait ainsi  $N_0$  dérivées. Toutefois, ce genre de configuration semble assez anecdotique.

**Enfin, dans le cas d'une dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme sur une fréquence hyperbolique de la boucle, la situation doit être beaucoup plus riche.** Une conjecture qui nous semble raisonnable est alors que le nombre de pertes de dérivées peut être arbitrairement grand sur une échelle de temps fixe car la réflexion répétée associée à une phase annulant le déterminant de Lopatinskii donne lieu à un nombre arbitrairement grand amplifications. On génèrerait ainsi par autointeraction des instabilités violentes à partir d'un phénomène de stabilité faible.



# Bibliographie

- [Aud11] Corentin Audiard. On mixed initial-boundary value problems for systems that are not strictly hyperbolic. *Appl. Math. Lett.*, 24(5):757–761, 2011.
- [Ben14a] Antoine Benoit. Finite speed of propagation for mixed problems in the wr class. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 13(6):2351–2358, 2014.
- [Ben14b] Antoine Benoit. Geometric optics expansions for linear hyperbolic boundary value problems and optimality of energy estimates for surface waves. *Differential Integral Equations*, 27(5-6):531–562, 2014.
- [BG98] S. Benzoni-Gavage. Stability of multi-dimensional phase transitions in a van der Waals fluid. *Nonlinear Anal.*, 31(1-2):243–263, 1998.
- [BG07] S. Benzoni-Gavage, D. Serre. *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2007.
- [BGRSZ02] S. Benzoni-Gavage, F. Rousset, D. Serre, and K. Zumbrun. Generic types and transitions in hyperbolic initial-boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 132(5):1073–1104, 2002.
- [Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [BT96a] A. M. Blokhin and D. L. Tkachev. A mixed problem for the wave equation in coordinate domains. I. Mixed problem for the wave equation in a quadrant. *Vychisl. Tekhnol.*, 1(1):13–37 (1997), 1996.
- [BT96b] A. M. Blokhin and D. L. Tkachev. A mixed problem for the wave equation in coordinate domains. II. Obtaining of a priori estimates protect in mixed problems of protect multidimensional wave equation. *Vychisl. Tekhnol.*, 1(2):26–46 (1997), 1996.
- [CG10] Jean-François Coulombel and Olivier Guès. Geometric optics expansions with amplification for hyperbolic boundary value problems: linear problems. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(6):2183–2233, 2010.
- [Cha72] J. Chazarain, A. Piriou. Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 22(4):193–237, 1972.
- [Cou02] Jean-François Coulombel. *Stabilité multidimensionnelle d’interfaces dynamiques. Application aux transitions de phase liquide-vapeur*. PhD thesis, ENS Lyon, 2002.
- [Cou05] Jean-François Coulombel. Well-posedness of hyperbolic initial boundary value problems. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(6):786–818, 2005.

- [Cou11a] Jean-Francois Coulombel. The hyperbolic region for hyperbolic boundary value problems. *Osaka J. Math.*, 48(2):457–469, 2011.
- [Cou11b] Jean-François Coulombel. Stability of finite difference schemes for hyperbolic initial boundary value problems II. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 10(1):37–98, 2011.
- [CP81] Jacques Chazarain and Alain Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [Dui11] J. J. Duistermaat. *Fourier integral operators*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2011. Reprint of the 1996 edition [MR1362544], based on the original lecture notes published in 1973 [MR0451313].
- [Fri54] K. O. Friedrichs. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7:345–392, 1954.
- [Fri58] K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11:333–418, 1958.
- [GKS72] Bertil Gustafsson, Heinz-Otto Kreiss, and Arne Sundström. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II. *Math. Comp.*, 26:649–686, 1972.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [Gri89] P. Grisvard. Singularities in elliptic boundary value problems. *Delft Progr. Rep.*, 13(3):349–373, 1989.
- [GS01] Filippo Gazzola and Paolo Secchi. Inflow-outflow problems for Euler equations in a rectangular cylinder. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 8(2):195–217, 2001.
- [Her63] Reuben Hersh. Mixed problems in several variables. *J. Math. Mech.*, 12:317–334, 1963.
- [Her12] M. Hernandez. Resonant leading term geometric optics expansions with boundary layers for quasilinear hyperbolic boundary problems. *submitted*, 2012.
- [HT14a] Aimin Huang and Roger Temam. The linear hyperbolic initial and boundary value problems in a domain with corners. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 19(6):1627–1665, 2014.
- [HT14b] Aimin Huang and Roger Temam. The linearized 2D inviscid shallow water equations in a rectangle: boundary conditions and well-posedness. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 211(3):1027–1063, 2014.
- [Hua0] Aimin Huang. Existence of solutions for linear hyperbolic initial-boundary value problems in a rectangle. *Applicable Analysis*, 0(0):1–29, 0.
- [Ika70] M. Ikawa. Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition. *Osaka J. Math.*, 7:495–525, 1970.
- [JMR93] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves. *Duke Math. J.*, 70(2):373–404, 1993.

- [KO71] I. A. K. Kupka and S. J. Osher. On the wave equation in a multi-dimensional corner. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24:381–393, 1971.
- [Kre70] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23:277–298, 1970.
- [KT80] Kiyofumi Kojima and Masaru Taniguchi. Mixed problem for hyperbolic equations in a domain with a corner. *Funkcial. Ekvac.*, 23(2):171–195, 1980.
- [Lax57] P. D. Lax. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. *Duke Math. J.*, 24:627–646, 1957.
- [Les07] V. Lescarret. Wave transmission in dispersive media. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(4):485–535, 2007.
- [LP60] P. D. Lax and R. S. Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:427–455, 1960.
- [Maj83a] Andrew Majda. The existence of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 43(281):v+93, 1983.
- [Maj83b] Andrew Majda. The stability of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 41(275):iv+95, 1983.
- [Mar10] Alice Marcou. Rigorous weakly nonlinear geometric optics for surface waves. *Asymptot. Anal.*, 69(3-4):125–174, 2010.
- [Mét86] Guy Métivier. Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d’espace. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(2):431–479, 1986.
- [Mét00] G. Métivier. The block structure condition for symmetric hyperbolic systems. *Bull. London Math. Soc.*, 32(6):689–702, 2000.
- [Mét04] Guy. Métivier. *Small viscosity and boundary layer methods*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004. Theory, stability analysis, and applications.
- [Mét14] G. Métivier. On the  $l^2$  well posedness of hyperbolic initial boundary value problems. *Preprint*, 2014.
- [MO75] Andrew Majda and Stanley Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5):607–675, 1975.
- [Moy68] Robert D. Moyer. On the nonidentity of weak and strong extensions of differential operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19:487–488, 1968.
- [MS11] Alessandro Morando and Paolo Secchi. Regularity of weakly well posed hyperbolic mixed problems with characteristic boundary. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 8(1):37–99, 2011.
- [MZ05] Guy Métivier and Kevin Zumbrun. Hyperbolic boundary value problems for symmetric systems with variable multiplicities. *J. Differential Equations*, 211(1):61–134, 2005.
- [Ohk81] Toshio Ohkubo. Regularity of solutions to hyperbolic mixed problems with uniformly characteristic boundary. *Hokkaido Math. J.*, 10(1):93–123, 1981.

- [Ohk89] Toshio Ohkubo. Well posedness for quasi-linear hyperbolic mixed problems with characteristic boundary. *Hokkaido Math. J.*, 18(1):79–123, 1989.
- [Osh73] Stanley Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic systems in regions with corners. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176:141–164, 1973.
- [Osh74a] Stanley Osher. An ill-posed problem for a strictly hyperbolic equation in two unknowns near a corner. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:705–708, 1974.
- [Osh74b] Stanley Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic systems in regions with corners. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 198:155–175, 1974.
- [Pey65] Gideon Peyser. On the identity of weak and strong solutions of differential equations with local boundary conditions. *Amer. J. Math.*, 87:267–277, 1965.
- [Pey75] Gideon Peyser. Symmetric positive systems in corner domains. *J. Differential Equations*, 18:135–157, 1975.
- [Rau72] Jeffrey Rauch.  $\mathcal{L}_2$  is a continuable initial condition for Kreiss’ mixed problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 25:265–285, 1972.
- [Rau85] Jeffrey Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1):167–187, 1985.
- [Rau94] J. Rauch. Boundary value problems with nonuniformly characteristic boundary. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 73(4):347–353, 1994.
- [Rau12] Jeffrey Rauch. *Hyperbolic partial differential equations and geometric optics*, volume 133 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [Sar62] Leonard Sarason. On weak and strong solutions of boundary value problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 15:237–288, 1962.
- [Sar65] Leonard Sarason. On hyperbolic mixed problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 18:310–334, 1965.
- [Sar67] Leonard Sarason. Elliptic regularization for symmetric positive systems. *J. Math. Mech.*, 16:807–827, 1967.
- [Sar77] Leonard Sarason. Hyperbolic and other symmetrizable systems in regions with corners and edges. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(1):1–39, 1977.
- [Sar70] L. Sarason. Symmetrizable systems in regions with corners and edges. *J. Math. Mech.*, 19:601–607, 1969/70.
- [Ser99] Denis Serre. *Systems of conservation laws. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Hyperbolicity, entropies, shock waves, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [Ser00] Denis Serre. *Systems of conservation laws. 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Geometric structures, oscillations, and initial-boundary value problems, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [Shi72] Taira Shirota. On the propagation speed of hyperbolic operator with mixed boundary conditions. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I*, 22:25–31, 1972.

- [SS75] L. Sarason and J. A. Smoller. Geometrical optics and the corner problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 56:34–69, 1974/75.
- [ST88] M. Sablé-Tougeron. Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(3):261–292, 1988.
- [Str69] Gilbert Strang. Hyperbolic initial-boundary value problems in two unknowns. *J. Differential Equations*, 6:161–171, 1969.
- [Sve84] E. C. Svendsen. Smooth solutions of initial-value problems in regions with corners. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92(2):185–189, 1984.
- [Tan78] Masaru Taniguchi. Mixed problem for wave equation in the domain with a corner. *Funkcial. Ekvac.*, 21(3):249–259, 1978.
- [Wil96] M. Williams. Nonlinear geometric optics for hyperbolic boundary problems. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(11-12):1829–1895, 1996.
- [Wil00] M. Williams. Boundary layers and glancing blow-up in nonlinear geometric optics. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(3):383–432, 2000.
- [Yos95] Kōsaku Yosida. *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.







# Thèse de Doctorat

**Antoine BENOIT**

**Problèmes aux limites, optique géométrique et singularités.**

**Boundary value problems, geometric optics expansions and singularities.**

## Résumé

On s'intéresse aux problèmes aux limites hyperboliques posés dans le demi-espace ou dans le quart d'espace. Ce mémoire se compose de deux parties indépendantes, la première qui a trait aux problèmes dans le demi-espace concerne les problèmes faiblement bien posés au sens où la solution est moins régulière que les données du problème. On montre alors l'optimalité des estimations d'énergie démontrées dans la littérature et un résultat de propagation à vitesse finie de l'information. Dans la seconde partie, à propos des problèmes dans le quart d'espace, on montre que le problème est fortement bien posé, au sens où la solution est aussi régulière que les données du problème dans un cadre particulier, le cas symétrique à conditions de bord strictement dissipatives. Puis on apporte des contributions dans le cas général par rapport à la littérature. Enfin, on construit de façon rigoureuse le développement d'optique géométrique de la solution d'un problème dans le quart d'espace. Ce développement permet en particulier de mettre en évidence de nouveaux phénomènes comme par exemple, le phénomène d'autointeraction entre les phases, la génération d'un nombre infini de phases ou encore de concentration au coin.

## Mots clés

problèmes aux limites hyperboliques, optique géométrique, problèmes à coin, problèmes faiblement bien posés.

## Abstract

We are interested in hyperbolic boundary value problems in the half space or in the quarter space. This manuscript is composed of two independent parts, the first one deals with weakly well-posed problems in the half space. By weakly well-posed we mean that the solution is not as regular as the source terms of the problem. In this framework, we show the optimality of energy estimates established in the existing literature and a finite speed of propagation result. In the second part of the manuscript, about hyperbolic boundary value problems in the quarter space, we show that the problem is strongly well-posed (in the sense that the solution is as regular as the source terms) in the particular framework of symmetric with strictly dissipative boundary conditions problems. Then we give some new contributions about the strong well-posedness in the general framework. Finally, we construct rigorous geometric optics expansion of the solution of the problem in the quarter space. This expansion permits, in particular, to show that some new phenomena such as selfinteraction phenomena between the phases, the generation of an infinite number of phases or the concentration at the corner.

## Key Words

hyperbolic boundary value problem, geometric optics expansion, corner problem, weak well-posedness.